การศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคหัดจากการฉีดวัคซีน กรณีศึกษาจังหวัดภูเก็ต

A study of the mathematical model of epidemic control. of measles from vaccination case study Phuket Province

สิโรรส เริงการ[1] เจษฎา สุจริตธุระการ[1] อนุวัตร จิรวัฒนพาณิช[1]
Siroros Reangkarn [1] Jetsada Sujaritturakan[1] Anuwat Jirawattanapanich[1]
[1]มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต 21 ม.6 ถ.เทพกระษัตรี ต.รัษฎา อ.เมือง ภูเก็ต 83000
[1]Phuket Rajabhat University 21 Moo 6, Thepkrasattri Road, Ratsada Subdistrict, Mueang District, Phuket 83000
*Corresponding author E-mail: S6212229103@pkru.ac.th

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาและวิเคราะห์เสถียรภาพของผลการฉีดวัคซีนสำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโรคหัด ในจังหวัดภูเก็ต วิเคราะห์ตัวแบบโดยใช้วิธีมาตรฐาน ศึกษาจุดสมดุล ศึกษาเสถียรภาพของจุดสมดุล หาคำตอบเชิงวิเคราะห์ ศึกษาผลการฉีดวัคซีนสำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์และหาคำตอบเชิงตัวเลข ผลวิจัยพบว่าจุดสมดุลที่ไม่มีโรคและจุดสมดุลที่มีโรคเป็น Local Asymptotically Stable และมีค่าระดับการติดเชื้อเท่ากับ $R_0 = \dfrac{\Delta\mu N\theta}{(\beta+\Omega)(\Omega+\theta)(\Omega+\alpha)}$ และอัตราฉีดวัคซีนเป็นปัจจัยที่มีผลต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ถ้าประชากรที่เสียงต่อการติดเชื้อมีการฉีดวัคซีนป้องกันเป็นจำนวนมาก จะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคลดลง

คำสำคัญ : ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์, โรคหัด, วัคซีนป้องกัน

Abstract

The purpose of this research was to develop and analyze the stability of vaccination results for a mathematical model of measles. in Phuket The model was analyzed using standard methods. study the balance point Study the stability of the equilibrium point. find analytical answers Study the vaccination results for a mathematical model and find a numerical answer. The results showed that the equilibrium point without disease and the equilibrium point with disease were local asymptotically stable and the level of infection was equal $R_0 = \dfrac{\Delta\mu N\theta}{(\beta+\Omega)(\Omega+\theta)(\Omega+\alpha)}$.. and vaccination rate are factors affecting the mathematical model. If populations at risk of infection are vaccinated in large numbers. will result in a reduction in the spread of the disease

Keywords : mathematical model, measles, preventive vaccine

บทนำ

ปัจจุบันคณิตศาสตร์ได้เข้ามามีบทบาทในการดำรงชีวิตของมนุษย์ สามารถนำมาประยุกต์ใช้ได้หลากหลายโดยเฉพาะทางการแพทย์ สามารถประยุกต์ใช้เพื่อจำลองการเกิดโรคและการรักษาโรคต่าง ๆ อีกทั้งยังเป็นเครื่องมือช่วยทำความเข้าใจเกี่ยวกับสุขภาพหลายๆด้าน เช่น สภาพแวดล้อมทำให้เกิดโรคต่างๆ การป้องกันโรค เป็นต้น (อนุวัตร จิรวัฒนพาณิช และคณะ 2560)

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นแบบจำลองที่ใช้ภาษาทางคณิตศาสตร์ โดยใช้สมการอธิบายสถานการณ์จากการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างค่าของข้อมูลในระบบที่จำลองขึ้น โดยไม่สนใจรายละเอียดปลีกย่อยบางอย่างที่อาจจะมองข้ามไปได้ มีจุดมุ่งหมายเพื่อจะจับองค์ประกอบที่สำคัญที่สุดของเหตุการณ์หนึ่งๆ (อนุวัตร จิรวัฒนพาณิช และคณะ 2560)

จากการศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์แสดงให้เห็นถึงบทบาทและประโยชน์ของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่มีส่วนช่วยในการแก้วิกฤตการณ์ที่กำลังเกิดขึ้นจากโรคภัยต่างๆ โดยจะจำลองประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ตัวเชื้อโรค ตัวพาหะนำโรค และผู้ติดเชื้อ โดยแปลงข้อมูลให้อยู่ในรูปสมการทางคณิตศาสตร์ เพื่ออธิบายลักษณะของการระบาดและการดำเนินของโรคโดยที่ผู้วิจัยไม่จำเป็นต้องไปศึกษากับมนุษย์โดยตรงซึ่งอาจเกิดอันตรายต่อชีวิตของผู้วิจัยและผู้ป่วยได้อีก (Bureau of Epidemiotogy, 2557)

โรคหัด (Measles) คือโรคที่ติดเชื้อจากระบบทางเดินหายใจ ผู้ป่วยจะเกิดผื่นขึ้นตามผิวหนังพร้อมเป็นไข้ร่วมด้วย โดยโรคหัดเกิดจากไวรัสกลุ่มพารามิคโซไวรัส (Paramyxovirus) สามารถแพร่เชื้อและติดต่อกันได้ผ่านทางอากาศหรือการสัมผัสน้ำมูกและน้ำลายของผู้ป่วยโดยตรง ส่วนใหญ่มักเกิดในเด็กเล็ก รวมทั้งเป็นหนึ่งในสาเหตุการเสียชีวิตของเด็กแม้จะมีวัคซีนฉีดป้องกันโรคแล้วก็ตาม (โรงพยาบาลโป่งน้ำร้อน 2559)

จากเหตุข้างต้นผู้วิจัยได้ตระหนักและเห็นประโยชน์ที่ได้รับจึงทำการวิจัยเรื่องตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคหัดโดยการฉีดวัคซีน ซึ่งผู้วิจัยได้เพิ่มตัวแปรอัตราการฉีดวัคซีนเป็นปัจจัยสำหรับการศึกษาในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ เพื่อสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับป้องกันและควบคุมโรคหัดที่มีประสิทธิภาพสูงขึ้น

วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย

1.เพื่อพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับควบคุมการแพร่ระบาดของโรคหัด โดยการฉีดวัคซีนในจังหวัดภูเก็ต

2. เพื่อวิเคราะห์เสถียรภาพของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับควบคุมการแพร่ระบาดโดยการฉีดวัคซีน ในจังหวัดภูเก็ต

วิธีการดำเนินการวิจัย

การดำเนินการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยจะศึกษาและพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการฉีดวัคซีนป้องกันการแพร่ระบาดของโรคหัด โดยดำเนินการตาม 2 ขั้นตอน ดังนี้

1. การพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยได้แบ่งประชากรออกเป็น 4 กลุ่ม คือ กลุ่มคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ กลุ่มคนที่ติดเชื้อแต่ไม่แสดงอาการ กลุ่มคนที่ติดเชื้อแสดงอาการ และกลุ่มคนที่หายจากโรค ผู้วิจัยได้กำหนดตัวแปรดังนี้ $S(t)$ จำนวนคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ณ เวลา t ใดๆ , $E(t)$ จำนวนคนที่ติดเชื้อแต่ไม่แสดงอาการ ณ เวลา t ใดๆ , $I(t)$ จำนวนคนที่ติดเชื้อ ณ เวลา t ใดๆ, $R(t)$ จำนวนคนที่หายจากโรค ณ เวลา t ใดๆ โดย $S(t) > 0, E(t) > 0, I(t) > 0$ และ $R(t) > 0$ เนื่องจากจำนวนประชากรมีค่าคงที่ไม่ขึ้นกับเวลา คือ $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$ ซึ่งเป็นค่าคงที่

2. การวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ การวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เป็นการวิเคราะห์ตามวิธีการมาตรฐาน (Standart method) โดยศึกษาจุดสมดุลและศึกษาเสถียรภาพของจุดสมดุลเพื่อหาเงื่อนไขของพารามิเตอร์ที่เหมาะสมของจุดสมดุล หาค่าระดับการติดเชื้อโดยใช้วิธี Next Generations Method หาคำตอบเชิงวิเคราะห์และหาคำตอบเชิงตัวเลข โดยวิธี Numerical Analysis ดังวิธีการต่อไปนี้

2.1 การวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐาน

การวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐานเป็นการศึกษาจุดสมดุล ค่าระดับการติดเชื้อ และเสถียรภาพของระบบ ดังนี้

2.1.1 การหาขอบเขตของค่าคงที่ เป็นการหาขอบเขตของค่าคงที่และช่วงคำตอบของตัวแปรต่างๆโดยการใช้เทคนิคการอินทิเกรตช่วยในการแสดงหาคำตอบ $S(t), E(t), I(t)$ และ $R(t)$ ซึ่งมีขอบเขตของค่าคงที่ อยู่ในจำนวนจริงบวก

2.1.2 จุดสมดุล การหาจุดสมดุลดำเนินการโดยจัดสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ให้เท่ากับศูนย์ คือ $\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dE}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0, \frac{dR}{dt} = 0$ จะได้ค่าจุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อโรค (Disease Free Equilibrium Point : E_0) ในกรณีที่ไม่มีการติดเชื้อโรค โดยกำหนดให้ $E_0 = (S, E, I, R) = E_0\left(\frac{\mu N}{\beta+\Omega}, 0, 0, \frac{\beta\mu N}{\beta+\Omega}\right)$ และจะได้ค่าจุดสมดุลเกิดการแพร่ระบาดของ เชื้อโรค (Disease Free Equilibrium Point : E_1) ในกรณีที่มีการระบาดของเชื้อโรค โดยกำหนดให้ $I \neq 0$ จะได้ $E_1 = \left(S^*, E^*, I^*, R^*\right)$

2.1.3 การหาค่าระดับการติดเชื้อ ค่าระดับการติดเชื้อเป็นค่าเฉลี่ยที่ผู้ป่วยหนึ่งคนสามารถทำให้คนกลุ่มเสี่ยงป่วยเป็นจำนวนกี่คนในช่วงเวลาที่เขายังป่วยอยู่ โดยใช้วิธี Next Generation Method โดยจัดการสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นในรูป $\frac{\partial X}{\partial t} = F(X) - V(X)$ เพื่อหาค่า R_0 จากเมตริกซ์ $P\left(Fv^{-1}\right)$ ซึ่ง $F(X)$ คือ เมตริกซ์ของผู้ป่วยที่เพิ่มขึ้น, $V(X)$ คือ เมตริกซ์ของผู้ป่วยที่เปลี่ยนสถานะจากกลุ่มหนึ่งไปอีกกลุ่มหนึ่ง ได้จากอนุพันธ์ย่อย ดังนี้

$$X = \begin{bmatrix} S \\ E \\ I \\ R \end{bmatrix}, F = \left[\frac{\partial F_i(E_0)}{\partial X_i}\right] \quad \text{และ} \quad V = \left[\frac{\partial V_i\left(E_0\right)}{\partial X_i}\right]$$ โดยพิจารณา R_0 ดังนี้

1. $R_0 > 1$ แสดงว่า โรคมีการระบาดเพิ่มขึ้น (Epidemic)
2. $R_0 = 1$ แสดงว่า โรคเริ่มเสถียร (Endemic)
3. $R_0 < 1$ แสดงว่า โรคไม่มีการแพร่ระบาด

2.2 การวิเคราะห์เสถียรภาพ เป็นการหาค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen Value) เพื่ออธิบายคำตอบของสมการเกี่ยวกับค่าความสมดุลสำหรับการตรวจสอบว่าเป็น Local Asymptotically Stable มี 2 กรณี ดังนี้

1. Local Asymptotically Stable ณ จุด E_0 ของจุดสมดุลที่ไม่มีโรค โดยการตรวจสอบค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมตริกซ์ ณ สภาวะที่ไม่มีโรค (E_0) ซึ่งจะได้สมการลักษณะเฉพาะจาก $\det(J_0 - \lambda I) = 0$ ซึ่ง J_0 คือ จาโคเบียนเมตริกซ์ ณ จุด E_0 และ I คือ เมตริกซ์เอกลักษณ์ โดยมีข้อกำหนดว่า λ ทุกค่าส่วนจริงจะเป็นลบซึ่งจะสอดคล้องตามเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz ซึ่งจะส่งผลให้ค่า $R_0 < 1$

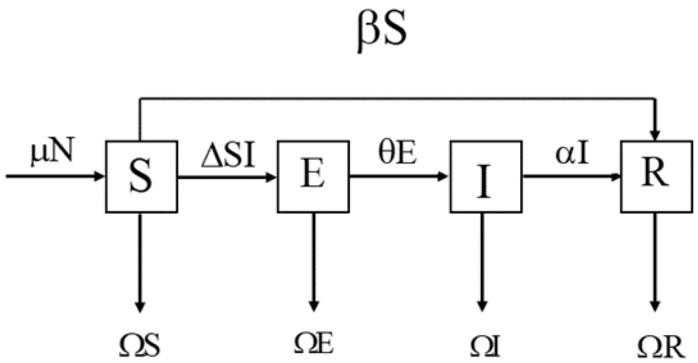
2. Local Asymptotically Stable ณ จุด E_1 ของจุดสมดุลที่มีโรค โดยการตรวจสอบค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมตริกซ์ ณ สภาวะที่มีการแพร่ระบาดของโรค (E_1) ซึ่งจะได้สมการลักษณะเฉพาะจาก $\det(J_1 - \lambda I) = 0$ ซึ่ง J_1 คือ จาโคเบียนเมตริกซ์ ณ จุด E_1 และ I คือ เมตริกซ์เอกลักษณ์ โดยมีข้อกำหนดว่า λ ทุกค่าส่วนจริงจะเป็นลบซึ่งจะสอดคล้องตามเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz ซึ่งจะส่งผลให้ค่า $R_0 > 1$

2.3 การวิเคราะห์เชิงตัวเลข การวิเคราะห์เชิงตัวเลขเป็นการพิจารณาหาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมที่ทำให้จุดสมดุลที่ไม่มีโรค (Disease Free Equilibrium Point: E_0) และจุดสมดุลที่เกิดการแพร่ระบาดของโรค (Endemic Equilibrium Point: E_1) ที่ทำให้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นเป็น Local Asymptotically Stable เพื่อนำค่าพารามิเตอร์ไปคำนวณหาคำตอบเชิงตัวเลขโดยจำลองแบบด้วยโปรแกรม Matlap (สุกัลยา ศรีสุริฉัน, 2559)

ผลการวิจัย

ตอนที่ 1 ผลการพัฒนาผลการฉีดวัคซีนสำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการป้องกันโรคหัด

จากตัวแปรข้างต้นผู้วิจัยได้สร้างแผนภาพผลการฉีดวัคซีนสำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการป้องกันโรคหัด



ภาพที่ 1 แผนภาพความสัมพันธ์และองค์ประกอบผลของการฉีดวัคซีนสำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการป้องกันโรคหัด

จากภาพที่ 1 สามารถเปลี่ยนตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น

$$\frac{dS}{dt} = \mu N - \Delta SI - \beta S - \Omega S \quad (1)$$

$$\frac{dE}{dt} = \Delta SI - \Omega E - \theta E \quad (2)$$

$$\frac{dI}{dt} = \theta E - \Omega I - \alpha I \quad (3)$$

$$\frac{dR}{dt} = \alpha I + \beta S - \Omega R \quad (4)$$

โดยมีเงื่อนไขประชากรมนุษย์จำนวนคงที่ $N = S + E + I + R$ เมื่อกำหนดสัญลักษณ์พารามิเตอร์ μ เป็นอัตราการเกิดของประชากร, Ω เป็นอัตราการเสียชีวิตของประชากร, Δ เป็นอัตราการสัมผัสเชื้อ, θ เป็นอัตราการฟักตัวของเชื้อ, α เป็นอัตราภูมิคุ้มกัน, และ N เป็นจำนวนประชากรทั้งหมด เนื่องจากค่าอนุพันธ์ของค่าคงที่จะมีค่าเป็นศูนย์ และค่าจำนวนของประชากรแต่ละกลุ่มจะ มีค่าไม่เกิน N โดยดำเนินการดังนี้

1. การวิเคราะห์ตามแบบมาตรฐาน

จาก Rate of change = Rate inflow-Rate outflow จะได้

$$F(X) = \mu N - \Delta SI - \beta S - \Omega S + \Delta SI - \Omega E - \theta E + \theta E - \Omega I - \alpha I + \alpha I + \beta S - \Omega R$$

ดังนั้น $\frac{dN}{dt} = \mu N - \Omega S - \Omega E - \Omega I - \Omega R$

เมื่อ $S = N, E = 0, I = 0, R = 0$

จะได้ $\frac{dN}{dt} = \mu N - \Omega N - \Omega(0) - \Omega(0) - \Omega(0)$

$$\frac{dN}{dt} = \mu N - \Omega N$$

$$\frac{dN}{dt} = (\mu - \Omega) N$$

แสดงว่า N เป็นค่าคงที่ เมื่อ $\mu = \Omega$

1.1 การหาจุดสมดุล โดยจัดสมการอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้นของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ให้เท่ากับศูนย์จะได้ $\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dE}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0, \frac{dR}{dt} = 0$ ดังนี้

$$s^* = \frac{\mu N}{\Delta I^* + \beta + \Omega} \quad (5)$$

$$E^* = \frac{\Delta \mu N I^* (\Omega + \theta)}{\Delta I^* + \beta + \Omega} \quad (6)$$

$$I^* = \frac{\theta \Delta \mu N (\Omega + \theta)(\Omega + \alpha)}{\Delta(\beta + \Omega)} \quad (7)$$

$$R^* = \frac{\alpha I^* \Omega + \beta \mu N}{\Delta I^* + \beta + \Omega} \quad (8)$$

1.1.1การหาจุดสมดุลที่ไม่มีโรค (E_0) จากสมการ (1), (2), (3) และ (4) จะได้ค่าจุดสมดุลที่ไม่มีโรค (Disease Free Equilibrium Point : E_0) ในกรณีที่ไม่มีการติดเชื้อ โดยกำหนดให้ $I = 0, S = N$ และ $R = 0$ $E_0 = (S, E, I, R) = E_0\left(\frac{\mu N}{\beta + \Omega}, 0, 0, \frac{\beta \mu N}{\beta + \Omega}\right)$ เสถียรของระบบ (stability of Systems) ที่จุด E_0 โดยดำเนินการหา

สมการลักษณะเฉพาะ $\det(J_0-\lambda I)=0$ เพื่อหาค่า λ เมื่อ λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen Values) และ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด

$$J_0=\begin{bmatrix}-\beta-\Omega & 0 & -\Delta S & 0\\ \Delta I & -\Omega-\theta & \Delta S & 0\\ 0 & \theta & -\Omega-\alpha & 0\\ \beta & 0 & \alpha & -\Omega\end{bmatrix}, J_0-\lambda I=\begin{bmatrix}-\beta-\Omega & 0 & -\Delta S & 0\\ \Delta I & -\Omega-\theta & \Delta S & 0\\ 0 & \theta & -\Omega-\alpha & 0\\ \beta & 0 & \alpha & -\Omega\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$$

$$\det\left(J_0-\lambda I\right)=\begin{bmatrix}-\beta-\Omega-\lambda & 0 & -\Delta S & 0\\ \Delta I & -\Omega-\theta-\lambda & \Delta S & 0\\ 0 & \theta & -\Omega-\alpha-\lambda & 0\\ \beta & 0 & \alpha & -\Omega-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\det\left(J_0-\lambda I\right)=\left(-\Omega-\lambda\right)\left[\left[\left(-\beta-\Omega-\lambda\right)\left(-\Omega-\theta-\lambda\right)\left(-\Omega-\alpha-\lambda\right)\right]-\left[\theta\Delta\left(-\beta-\Omega-\lambda\right)\right]\right]$$

1.1.2 การหาจุดสมดุลเกิดการแพร่ระบาดของเชื้อโรค $\left(E_1\right)$

จากสมการ (1),(2),(3) และ (4) จะได้ค่าจุดสมดุลที่เกิดจากการแพร่ระบาดของเชื้อโรค (Endemic Equilibrium Point : E_1) ในกรณีที่มีการแพร่ระบาดของเชื้อโรค โดยกำหนดให้ $I>0$ และ $S=N$ ซึ่งได้จาก $E_1=\left(S^*,E^*,I^*,R^*\right)=\left(\frac{\mu N}{\nu I^*+\beta+\Omega},\frac{\Delta\mu NI^*(\Omega+\theta)}{VI^*+\beta+\Omega},\frac{\theta\Delta\mu N(\Omega+\theta)(\Omega+\alpha)}{\Delta(\beta+\Omega)},\frac{\alpha I^*\Omega+\beta\mu N}{\Delta I^*+\beta+\Omega}\right)$ ดังนั้น สมการลักษณะเฉพาะที่จุด $E_1=\left(S^*,E^*,I^*,R^*\right)$ โดยให้ $\det(J_1-\lambda I_3)=0$ เพื่อหาค่า λ เมื่อ λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen Values) และ I_3 เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 3×3 ดังนี้

$$J_1=\begin{bmatrix}\Delta I^*-\beta-\Omega & 0 & -\Delta S^* & 0\\ \Delta I^* & -\Omega-\theta & \Delta S & 0\\ 0 & \theta & -\Omega-\alpha & 0\\ \beta & 0 & \alpha & -\Omega\end{bmatrix}, J_1-\lambda I=\begin{bmatrix}-\Delta I^*-\beta-\Omega & 0 & -\Delta S^* & 0\\ \Delta I^* & -\Omega-\theta & \Delta S^* & 0\\ 0 & \theta & -\Omega-\alpha & 0\\ \beta & 0 & \alpha & -\Omega\end{bmatrix}$$

$$\det\left(J_1-\lambda I\right)=\left(-\Omega-\lambda\right)\underbrace{\left[\left(\Delta I^*-\beta-\Omega-\lambda\right)\left(-\Omega-\theta-\lambda\right)\left(-\Omega-\alpha-\lambda\right)\right]}_{A}-\underbrace{\left[\theta\Delta S^*\left(\Delta I^*-\beta-\Omega-\lambda\right)\right]}_{B}$$

1.2 การหาค่าระดับการติดเชื้อ $\left(R_0\right)$ เป็นการหารัศมีที่โดดเด่นของการแพร่ระบาดของโรค โดยใช้วิธีการ Next Generation Method โดยจะได้สมการ (1) - (4) จะได้เมทริกซ์ในรูป $\frac{\partial X}{\partial t}=F(X)-V(X)$ เพื่อหาค่า spectral radius $P\left(FV^{-1}\right)$ ซึ่ง $F(X)$ และ $V(X)$ ได้จากอนุพันธ์ย่อย ดังนี้

$$X=\begin{bmatrix}S\\ E\\ I\\ R\end{bmatrix}, F=\left[\frac{\partial V_i\left(E_0\right)}{\partial X_i}\right] \text{และ } V=\left[\frac{\partial V_i\left(E_0\right)}{\partial X_i}\right]$$

เมื่อ $F(X)$ คือเมทริกซ์ของผู้ป่วยที่เพิ่มขึ้น และ $V(X)$ คือเมทริกซ์ของผู้ป่วยที่เปลี่ยนสถานะจากกลุ่มหนึ่งไปอีกกลุ่มหนึ่งโดยพิจารณาค่าระดับการติดเชื้อ $\left(R_0\right)$ โดยพิจารณา ดังนี้

$$F(X)=\begin{bmatrix}0\\ \Delta SI\\ 0\\ 0\end{bmatrix}, V(X)=\begin{bmatrix}-\mu N+\Delta SI+\beta S+\Omega S\\ \Omega E+\theta E\\ -\theta E+\Omega I+\alpha I\\ -\alpha I-\beta R+\Omega S\end{bmatrix}$$

ให้ $E_0=(S,E,I,R)=(N,0,0,N)$

จะได้ $$F(E_0)=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\ 0&0&\frac{\Delta\mu N}{(\beta+\Omega)}&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}, V(E_0)=\begin{bmatrix}\beta+\Omega&0&\frac{\Delta\mu N}{\beta+\Omega}&0\\ 0&\Omega+\theta&0&0\\ 0&-\theta&\Omega+\alpha&0\\ -\beta&0&-\alpha&\Omega\end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$FV^{-1}(E_0)=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\ 0&0&\frac{\Delta\mu N}{\beta+\Omega}&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{(\beta+\Omega)}&\frac{-\theta\Delta\mu N}{(\beta+\Omega)^2(\Omega+\theta)(\Omega+\alpha)}&\frac{-\nu\mu N}{(\omega+\theta)^2(\sigma+\omega+\beta)}&0\\ 0&\frac{1}{(\Omega+\theta)}&0&0\\ 0&\frac{\theta}{(\Omega+\theta)(\Omega+\alpha)}&\frac{1}{(\sigma+\omega+\beta)}&0\\ \frac{\beta}{\Omega(\beta+\Omega)}&\frac{\theta\alpha}{\Omega(\Omega+\theta)(\Omega+\alpha)}-\frac{-\beta\theta\Delta\mu N}{\Omega(\beta+\Omega)^2(\Omega+\theta)(\Omega+\alpha)}&\frac{\alpha}{\Omega(\Omega+\alpha)}+\frac{(-\beta)(\Delta\mu N)}{\Omega(\beta+\Omega)^2(\Omega+\alpha)}&\frac{1}{\Omega}\end{bmatrix}$$

จะได้

$$FV^{-1}(E_0)=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\ 0&\frac{\Delta\mu N\theta}{(\beta+\Omega)(\Omega+\theta)(\Omega+\alpha)}&\frac{\Delta\mu N}{(\beta+\Omega)(\Omega+\alpha)}&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}$$

จะได้ $$\det\left[FV^{-1}(E_0)-\lambda I\right]=(-\lambda)(-\lambda)(-\lambda)\left(\frac{\Delta\mu N\theta}{(\beta+\Omega)(\Omega+\theta)(\Omega+\alpha)}-\lambda\right)$$

ดังนั้น $\lambda_1=0,\lambda_2=0,\lambda_3=0,\lambda_4=\dfrac{\Delta\mu N\theta}{(\beta+\Omega)(\Omega+\theta)(\Omega+\alpha)}$

จากบทนิยาม $p\left(Fv^{-1}(E_0)\right)=\max\{0,0,0,\}\dfrac{\Delta\mu N\theta}{(\beta+\Omega)(\Omega+\theta)(\Omega+\alpha)}$

ดังนั้น $p\left(Fv^{-1}(E_0)\right)=\dfrac{\Delta\mu N\theta}{(\beta+\Omega)(\Omega+\theta)(\Omega+\alpha)}$ จะได้ค่าระดับการติดเชื้อ คือ $R_0=\dfrac{\Delta\mu N\theta}{(\beta+\Omega)(\Omega+\theta)(\Omega+\alpha)}$

ตอนที่ 2 ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขผลของการฉีดวัคซีนสำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการป้องกันโรคหัด กรณีศึกษาในจังหวัดภูเก็ต

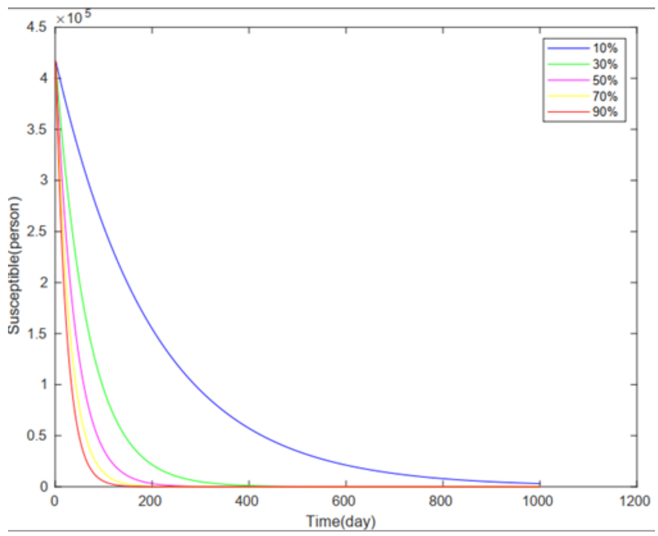
การวิจัยในครั้งนี้ผู้วิจัยได้วิเคราะห์เชิงตัวเลข โดยนำค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการสำรวจข้อมูลเกี่ยวกับการฉีดวัคซีนป้องกันโรคหัด ซึ่งมีค่าต่างๆ ดังนี้

ตารางที่ 1 ค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการสำรวจข้อมูลเกี่ยวกับการฉีดวัคซีนป้องกันโรคหัด

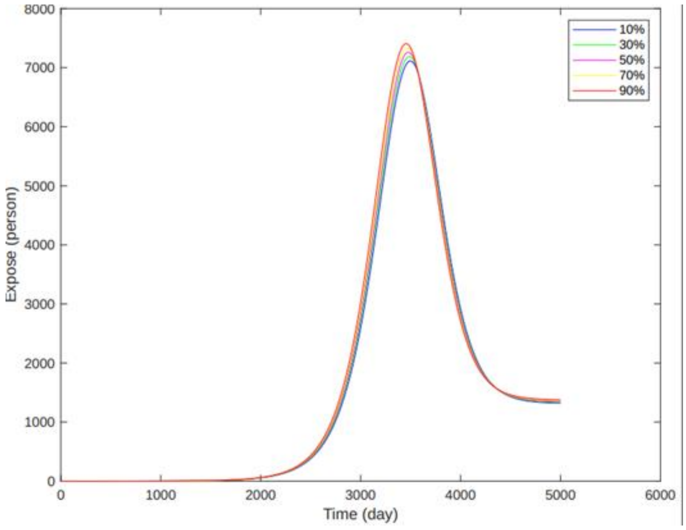
ข้อความ	สัญลักษณ์	ค่าพารามิเตอร์	หน่วย
อัตราการเกิดของประชากร	μ	4.18111×10^{-5}	คนต่อวัน
อัตราการเสียชีวิตของประชากร	Ω	1.69608×10^{-5}	คนต่อวัน
อัตราการฉีดวัคซีน	β	$0-1$	คนต่อวัน
อัตราการสัมผัสเชื้อ	Δ	3.93826×10^{-7}	คนต่อวัน
อัตราการฟักตัวของเชื้อ	θ	1.369863×10^{-2}	คนต่อวัน
อัตราการหายจากโรค	α	1.65669×10^{-5}	คนต่อวัน
จำนวนประชากรมนุษย์ทั้งหมด	N	417402	คน

***สำนักงานสาธารณสุขจังหวัดภูเก็ต**

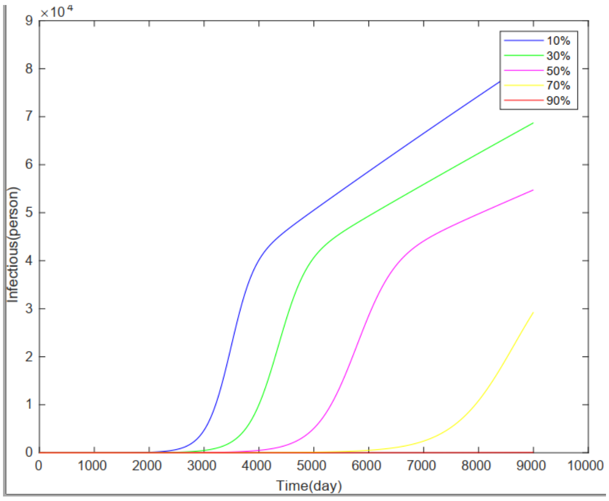
เมื่อพิจารณาเสถียรภาพของระบบ ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรค จะพบว่าค่าลักษณะเฉพาะทุกค่ามีส่วนจริงเป็นค่าลบ และสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Roouth-Huewitz ส่งผลให้คำตอบจะลู่เข้าสู่จุด (417402,0,0,0) ดังนั้นจุดสมดุลไม่มีเชื้อ E_0 จะเป็น Local asymptotically ดังรูป



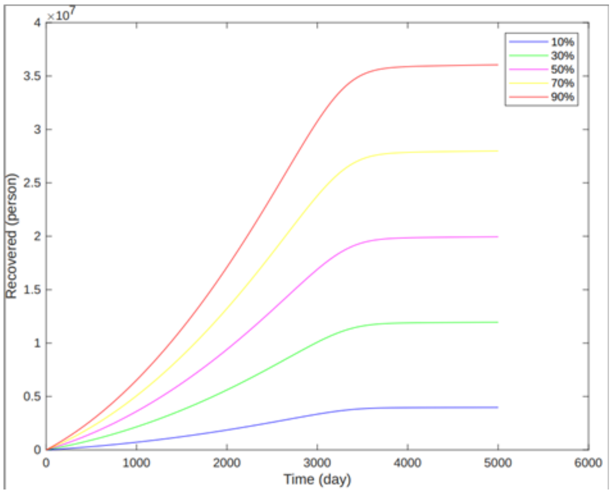
ภาพที่ 2 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (s) ณ เวลา t ใดๆ เมื่อค่า $\beta = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ ตามลำดับ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลที่มีโรค



ภาพที่ 3 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อแต่ไม่แสดงอาการ (E) ณ เวลา t ใดๆ เมื่อค่า $\beta = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ ตามลำดับ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลที่มีโรค



ภาพที่ 4 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อแต่ไม่แสดงอาการ (I) ณ เวลา t ใดๆ เมื่อค่า $\beta = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ ตามลำดับ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลที่มีโรค



ภาพที่ 5 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อแต่ไม่แสดงอาการ (R) ณ เวลา t ใดๆ เมื่อค่า $\beta = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ ตามลำดับ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลที่มีโรค

จากการศึกษาพบว่าอัตราการฉีดวัคซีนการแพร่ระบาดของโรคหัด เป็นปัจจัยหนึ่งที่ส่งผลต่อการเปลี่ยนแปลงของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคหัดโดยการฉีดวัคซีน ซึ่งอัตราการฉีดวัคซีนการแพร่ระบาดของโรคหัด มีค่ามากขึ้นส่งผลให้ค่าระดับการติดเชื้อ (R_0) ลดลง ดังนั้นถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อโรคหัด ได้รับวัคซีนป้องกันโรคหัดน้อย จะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคเพิ่มขึ้นและถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อโรคหัดได้รับวัคซีนจำนวนมากขึ้นจะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคลดลงจนกระทั่งไม่มีการแพร่ระบาดของโรคหัด

วิจารณ์ผล

งานวิจัยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดโรคหัด โดยการฉีดวัคซีน ในจังหวัดภูเก็ต ได้กำหนดประชากรให้มีจำนวนคงที่ และได้เก็บข้อมูลต่าง ๆ เฉพาะเขตภูเก็ตเท่านั้น ดังนั้นหากไปใช้กับประชากรที่มีการเปลี่ยนแปลงหรือเขตพื้นที่อื่น ๆ อาจทำให้ผลคลาดเคลื่อนได้

สรุปผล

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาผลของการฉีดวัคซีนสำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการป้องกันโรคหัด และวิเคราะห์เสถียรภาพของผลของการฉีดวัคซีนสำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการป้องกันโรคหัด ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ ระบบสมการอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น ซึ่งประกอบด้วยประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่แสดงอาการ ประชากรที่ติดเชื้อ และประชากรที่หายจากโรค ซึ่งผู้วิจัยเพิ่มค่าพารามิเตอร์ (Ω) คือ อัตราการฉีดวัคซีนลงในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ใช้วิธีการวิเคราะห์วิธีมาตรฐาน และวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับตรวจสอบการแพร่ระบาดของโรค

ผู้วิจัยได้พิจารณาจุดสมดุลที่ไม่มีโรคและจุดสมดุลที่เกิดการแพร่ระบาดของโรคโดยการวิเคราะห์จุดสมดุลและเสถียรภาพของจุดสมดุลด้วยวิธีการวิเคราะห์วิธีมาตรฐานซึ่งค่าเสถียรภาพของระบบ Local Asymptotically Stable ที่ได้ต้องเป็นไปตามเงื่อนไขของRouth-Hurwitz เพื่อสามารถหาค่าพารามิเตอร์ R_0 ซึ่งมีความจำเป็นภายใต้เงื่อนไขเพื่อให้ Local Asymptotically Stability of Equilibrium Stable ที่มีเสถียรภาพในส่วนของจุดสมดุลที่ไม่มีโรคและจุดสมดุลที่เกิดการแพร่ระบาดของโรค โดยที่ $R_0 = \frac{\Delta\mu N\theta}{(\beta+\Omega)(\Omega+\theta)(\Omega+\alpha)}$ สามารถพิจารณาค่าระดับการติดเชื้อ (R_0)โดยค่า $R_0 < 1$ วิเคราะห์ได้ว่า ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรคจึงไม่เกิดการแพร่ระบาดของโรค และค่า $R_0 > 1$ วิเคราะห์ได้ว่า ณ จุดสมดุลที่มีการติดเชื้อจึงเกิดการแพร่ระบาดของโรค จากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขพบว่าจุดสมดุลทั้งสองเป็น Local Asymptotically Stable

จากการวิจัยพบว่าประสิทธิภาพการฉีดวัคซีนป้องกันเป็นผลปัจจัยหนึ่งที่ส่งผลต่อการเปลี่ยนแปลงของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์SEIR สำหรับการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคหัด โดยพบว่าถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ มีการฉีดวัคซีนป้องกันน้อย จะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคเพิ่มมากขึ้น และถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีการฉีดวัคซีนป้องกันจำนวนมาก จะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคลดลงจนกระทั่งไม่มีการแพร่ระบาดของเชื้อ

ดังนั้นสามารถนำผลจากการวิจัยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ SEIR สำหรับการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคหัด โดยการฉีดวัคซีนป้องกันโรค เพื่อลดจำนวนผู้ป่วยและใช้เป็นข้อมูลทางวิชาการให้กับหน่วยงานที่เฝ้าระวังของสำนักงานระบาดวิทยา กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณะสุข รวมทั้งนำเสนอข้อมูลต่อหน่วยงานด้านสาธารณะสุขดำเนินการมาตรการควบคุมและป้องกันโรคหัด โดยการฉีดวัคซีนป้องกันให้กับประชาชนทั่วไปที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ

เอกสารอ้างอิง

Bureau of Epidemiotogy, 2557

บัณฑิตย์ อันยงค์.(2558).ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการแพร่ระบาดของโรคไข้เลือดออกโดยใช้การรณรงค์ให้ความรู้ กรณีศึกษาจังหวัดภูเก็ต. ภูเก็ต: มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต.

โรงพยาบาลโป่งน้ำร้อน 2559

อนุวัตร จิรวัฒนพาณิชและคณะ. (2559). ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ SEIR สำหรับการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคอีสุกอีใสโดยการรณรงค์ให้ความรู้. วารสารวิชาการมหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ตมหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต

อนุวัตร จิรวัฒนพาณิช และคณะ. (2559ก). ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของไข้หวัดใหญ่โดยการสวมหน้ากากอนามัย. การประชุมวิชาการระดับชาติมหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา ครั้งที่ 6, 15-16 สิงหาคม 2559. สงขลา: มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา.

กรมควบคุมโรค.(2563).โรคหัด.สำหรับระบาดวิทยา.กระทรวงสาธารณสุขจาก.
https://hdcservice.moph.go.th/hdc/main/index.php