ผลของอัตราการสวมถุงยางอนามัยสำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโรคหนองในแท้ กรณีศึกษาจังหวัดภูเก็ต

Effect of condom wear rate for a mathematical model of gonorrhea case study in Phuket Province

นูรฮากีมะห์ มูนีะ,[1] ป.ปัทมา เหมมาชูเกียรติกุล,[2] และอนุวัตร จิรวัฒนพาณิช[3]

[1] นักศึกษาสาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ตจังหวัดภูเก็ต 83000
โทร 093-6430828 อีเมล์ s6112229105@pkru.ac.th

[2]สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ตจังหวัดภูเก็ต 83000
โทร 086-4146080 อีเมล์ porpattama@pkru.ac.th

[3]สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ตจังหวัดภูเก็ต 83000
โทร 086-2727610 อีเมล์ anuwat.j@pkru.ac.th

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์1)เพื่อพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของอัตราการสวมถุงยางอนามัยสำหรับป้องกันของโรคหนองในแท้และ2)เพื่อวิเคราะห์เสถียรภาพของผลของอัตราการสวมถุงยางอนามัยสำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโรคหนองในแท้ ซึ่งวิเคราะห์ตัวแบบโดยใช้วิธีการวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐาน ศึกษาจุดสมดุล ศึกษาเสถียรภาพของจุดสมดุล หาคำตอบเชิงวิเคราะห์ โดยศึกษาอัตราการสวมถุงยางอนามัยในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์และหาคำตอบเชิงตัวเลข ผลวิจัยพบว่าจุดสมดุลที่ไม่มีโรคและจุดสมดุลที่มีโรคเป็น Local Asymptotically Stable และมีค่าระดับการติดเชื้อเป็น $R_0 = \dfrac{(1-\sigma)\theta N}{(\varepsilon+\phi)}$ และอัตราการสวมถุงยางอนามัยเป็นปัจจัยที่มีผลต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีการสวมถุงยางอนามัยเพื่อการป้องกันโรคหนองในแท้เป็นจำนวนมากจะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคลดลง

คำสำคัญ : ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์, โรคหนองในแท้, การสวมถุงยางอนามัย

Abstract

The objective of this research is 1.) To develop a mathematical model of condom use rates for the prevention of gonorrhea. And 2.) To analyze the stability of the effect of condom wear rates for a mathematical model of true gonorrhea. The model was analyzed using standard analytical methods. study the equilibrium point Study the stability of the equilibrium point. Get an analytical answer by studying condom wear rates in a mathematical model and numerically. The results showed that disease-free equilibrium and disease-local asymptotically stable equilibrium. And the level of infection is $R_0 = \dfrac{(1-\sigma)\theta N}{(\varepsilon+\phi)}$. And the condom-wearing rate was a factor affecting the mathematical model .If a population at risk for infection wears a large number of condoms for the prevention of gonorrhea, the spread of the disease will decrease.

Keywords : Mathematical model ,Gonorrhea, Condom wearing

บทนำ

คณิตศาสตร์ได้เข้ามามีบทบาทเกี่ยวข้องในการดำรงชีวิตของมนุษย์ สามารถนำมามาประยุกต์ใช้ได้หลากหลาย โดยเฉพาะทางการแพทย์สามารถประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์ เพื่อจำลองการเกิดโรคและการรักษาโรคต่างๆ รวมทั้งเป็นเครื่องมือช่วยทำความเข้าใจเกี่ยวกับสุขภาพหลายๆด้าน การป้องกันโรคการทดสอบปริมาณยา เป็นต้น ปัจจุบันมีการระบาดของโรคมากมาย เช่น โรคโควิด-19 โรควัณโรค และโรคระบาดทางเพศสัมพันธ์ อาทิเช่น โรคหนองในแท้ โรคหนองในเทียม และโรคเอดส์ เป็นต้น ดังนั้นจำเป็นต้องอาศัยเครื่องมือทางคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์มาประยุกต์ใช้แก้ปัญหาช่วยให้มนุษย์มีคุณภาพชีวิตที่ดีขึ้น (อนุวัตร จิรวัฒนาพาณิชและคณะ, 2562)

จากการศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์แสดงให้เห็นถึงบทบาทและประโยชน์ของตัวแบบเชิญคณิตศาสตร์ที่มีส่วนช่วยในการแก้วิกฤตการณ์ที่กำลังเกิดขึ้นจากโรคภัยต่างๆ โดยการจำลองประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ตัวเชื้อโรค ตัวพาหะนำโรค และผู้ติดเชื้อ โดยแปลงข้อมูลให้อยู่ในรูปสมการทางคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายถึงการแพร่ระบาดและการแพร่ระบาดของโรค โดยผู้วิจัยไม่จำเป็นต้องไปศึกษากับมนุษย์โดยตรง (กันสนิย์ เณรเทียน,2560)

โรคหนองในเป็นโรคติดต่อทางเพศสัมพันธ์เกิดจากเชื้อแบคที่เรียชนิดหนึ่ง ชื่อว่า (Neisseria gonorrhoeae) โดยเชื้อแบคทีเรียนี้เป็นเชื้อดื้อยา เรียกว่า ซุปเปอร์บั๊ก ทำให้การรักษาโรคหนองในแท้นั้นยากขึ้นโรคหนองในแท้ติดต่อผ่านทางการมีเพศสัมพันธ์ที่ไม่ได้ป้อง (ชยากร พงษ์พยัคเดิศ (นพ.) , voicetv,2559) กันซึ่งพบได้ประมาณ 40 - 50% ของโรคติดต่อทางเพศสัมพันธ์ โดยองค์การอนามัยโลก WHO ประเมินว่า ในแต่ละปีมีประชากรกว่า 78 ด้านคนทั่วโลกที่ติดเชื้อหนองในซึ่งส่วนมากจะพบมากที่สุดในกลุ่มอายุ 15-24 (นายแพทย์อัษฎางคัษฎางค์ , 2562)

ในปัจจุบันสถานการณ์โรคติกต่อทางเพศสัมพันธ์มีแนวโน้มเพิ่มสูงขึ้นในประเทศไทย กรมควบคุมโรค รายงานว่า โรคหนองในเป็นโรคติดต่อทางเพศสัมพันธ์ที่มีประชากรติดต่อกันมากที่สุด คือ มีอัตราผู้ป่วยสูงถึง15.8 คนต่อประชากรแสนคนโรคหนองในจะแพร่เชื้อได้ทั้งชายและหญิง และอาจมีภาวะโรคแทรกซ้อน เช่น โรคซิฟิลิส, HIV, โรคหนองในเทียม ในบางรายทำให้เกิดภาวะมีบุตรยากในเพศหญิงและชาย การติดเชื้อบริเวณข้อต่อซึ่งอาจทำให้มีอาการเจ็บผิวหนัง ปวดข้อต่อ เป็นไข้ ผื่นขึ้น บวม และรู้สึกเอยตามมา โรคหนองในจะส่งผลให้ผู้ป่วยไวต่อการติดเชื้อเอชไอวีซึ่งเป็นไวรัสที่ส่งผลให้นำไปสู่โรคเอดส์ และในกรณีหญิงมีครรภ์ติดเชื้ออาจทำให้เวลาทารกแรกคลอดติดเชื้อเกิดอาการตาอักเสบส่งผลต่อการมองเห็นของทารกจนทำให้ตาบอดและเกิดการติดเชื้อรุนแรงที่อวัยวะอื่นๆเป็นอันตรายต่อชีวิตของทารกได้ (สำนักระบาดวิทยากรมควบคุมโรคกระทรวงสาธารณสุข)

ในจังหวัดภูเก็ตมีผู้ติดเชื้อโรคหนองในแท้ตั้งแต่ปี 2558 ถึง 2562 มีจำนวนผู้ป่วยในจาก2558จำนวน 88 คน ซึ่งเพิ่มขึ้นจำนวน 34 คนในปี 2559 จำนวน122 คน ในปี 2560 มีจำนวน 91 คน ในปี 2561 มีจำนวน 99 คน และในปี2562 มีจำนวนผู้ป่วยเพิ่มขึ้นจาก ปี2558 รวมเป็น 138 คน ทำให้คนในจังหวัดภูเก็ตมีแนวโน้มของโรคหนองในแท้เพิ่มขึ้นสูงเนื่องจากขาดความรู้การป้องกันตนเองเกี่ยวกับการสวมถุงยางอนามัย (กระทรวงสาธารณสุขจังหวัดภูเก็ต)

จากเหตุข้างต้นผู้วิจัยได้ตระหนักและเห็นประโยชน์ จึงทำการวิจัยเรื่อง ผลของอัตราการสวมถุงยางอนามัยสำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโรคหนองในแท้ ซึ่งผู้วิจัยได้เพิ่มตัวแปรอัตราการสวมถุงยางอนามัยเป็นปัจจัยสำหรับการศึกษาในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ เพื่อสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับป้องกันและควบคุมโรคหนองในแท้ที่มีประสิทธิภาพสูงขึ้น

วัตถุประสงค์

1. เพื่อพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของอัตราการสวมถุงยางอนามัยสำหรับป้องกันของโรคหนองในแท้
2. เพื่อวิเคราะห์เสถียรภาพของผลของอัตราการสวมถุงยางอนามัยสำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโรคหนองในแท้

วิธีการวิจัย

การศึกษาวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับโรคหนองในแท้ที่สอดคล้องกับกลุ่มประชากรและลักษณะของการเกิดโรค วิธีการดำเนินการวิจัย 3 ขั้นตอนดังนี้

1. การพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยได้ศึกษาแผนภาพแสดงความสัมพันธ์ขององค์ประกอบในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ โดยกำหนดให้จำนวนประชากรทั้งหมดมีค่าคงที่ โดยแบ่งประชากรออกเป็น 3 กลุ่ม ผู้วิจัยได้กำหนดตัวแปร ดังนี้ $S(t)$ จำนวนประชากรกลุ่มเสี่ยง ณ t เวลาใดๆ, $I(t)$ จำนวนประชากรที่ติดเชื้อ ณ t เวลาใดๆ, $R(t)$ จำนวนประชากรที่หายป่วยจากโรค ณ t เวลาใดๆ โดย $S(t) > 0$, $I(t) > 0$ และ $R(t) > 0$

2. ตรวจสอบตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ การตรวจสอบผลของอัตราการสวมถุงยางอนามัยสำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโรคหนองในแท้ เป็นการตรวจสอบความถูกต้องของตัวแบบโดยผู้เชี่ยวชาญ

3. การวิเคราะห์แบบเชิงคณิตศาสตร์ เป็นการวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐาน(standart method) โดยศึกษาจุดเสถียรภาพของจุดสมดุลเพื่อหาเงื่อนไขของพารามิเตอร์ที่เหมาะสม หาค่าระดับการติดเชื้อโดยใช้วิธี Next Generation Method หาคำตอบเชิงวิเคราะห์และคำตอบเชิงตัวเลขโดยวิธี Numerical Analysis ดังวิธีการต่อไปนี้

3.1 การวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐาน การวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐานเป็นการศึกษาจุดสมดุล ค่าระดับการติดเชื้อ และเสถียรภาพของระบบ ดังนี้

3.1.1 การหาขอบเขตของค่าคงที่ เป็นการหาขอบเขตของค่าคงที่และช่วงคำตอบที่เป็นจำนวนจริงบวก โดยการใช้เทคนิคการอินทิเกรตช่วยแสดงช่วงคำตอบของ $S(t)$, $I(t)$ และ $R(t)$ จะมีขอบเขตของค่าคงที่ อยู่ในช่วงจำนวนจริง

3.1.2 จุดสมดุล เป็นการหาจุดสมดุลดำเนินการโดยจัดสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ให้เท่ากับศูนย์ คือ $\frac{dS}{dt}=0$, $\frac{dI}{dt}=0$, $\frac{dR}{dt}=0$ จะได้ค่าจุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อโรค ในกรณีที่ไม่มีการติดเชื้อ ซึ่งกำหนดให้ $E_0(S,I,R)=E_0(N,0,0)$ จะได้ค่าจุดสมดุลเกิดการแพร่ระบาดของเชื้อโรค ในกรณีที่มีการระบาดของเชื้อโรค ซึ่งกำหนดให้ $I\neq 0$, จะได้ $E_1(S,I,R)=E_1(S^*,I^*,R^*)$

3.1.3 การหาค่าระดับการติดเชื้อ ค่าระดับการติดเชื้อเป็นค่าเฉลี่ยที่ผู้ป่วยหนึ่งคนสามารถทำให้ประชากรกลุ่มเสี่ยงเป็นจำนวนกี่คนในช่วงเวลาที่เขายังเสี่ยงอยู่ โดยใช้วิธีการ Next Generation Method ซึ่งได้จัดการสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้นในรูป $\frac{dX}{dt}=F(X)-V(X)$ เพื่อหาค่า R_0 จากเมตริกซ์ $\rho\left(FV^{-1}\right)$ ซึ่งเมตริกซ์ของผู้ป่วยที่เพิ่มขึ้น $F(X)$ คือ เมตริกซ์ผู้ป่วยที่เพิ่มขึ้น, $V(X)$ คือ เมตริกซ์ผู้ป่วยที่เปลี่ยนสถานะจากกลุ่มหนึ่งไปอีกกลุ่มหนึ่ง ซึ่งได้จากอนุพันธ์ย่อย (Partial Derivative) ดังนี้

$$X=\begin{bmatrix}S\\I\\R\end{bmatrix},\ F=\left[\frac{\partial F_i(E_0)}{\partial X_i}\right] \text{ และ } F=\left[\frac{\partial V_i(E_0)}{\partial X_i}\right] \text{ โดยพิจารณา } R_0 \text{ ดังนี้}$$

1. ถ้า $R_0>0$ แสดงว่า โรคมีการระบาดเพิ่มขึ้น (Epidemic) 2. ถ้า $R_0=0$ แสดงว่า โรคเริ่มเสถียร (Endemic) 3. ถ้า $R_0<0$ แสดง โรคไม่มีการระบาด

3.2 การวิเคราะห์เสถียรภาพ เป็นการหาค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen Value) เพื่ออธิบายคำตอบของสมการเกี่ยวกับค่าความสมดุลสำหรับการตรวจสอบว่าเป็น Local Asymptotically Stable มี 2 กรณี

1) Local Asymptotically Stable ณ จุด E_0 ของจุดสมดุลที่ไม่มีโรค เป็นการตรวจสอบค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมตริกซ์ ณ สภาวะที่ไม่มีโรค (E_0) ซึ่งจะได้สมการลักษณะเฉพาะจาก $\det(J_0-\lambda I)=0$ ซึ่ง J_0 คือจาโคเบียนเมตริกซ์ ณ จุด E_0 และ I คือเมตริกซ์เอกลักษณ์ โดยมีข้อกำหนดว่า λ ทุกค่าส่วนจริงจะเป็นลบ จะสอดคล้องตามเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz ซึ่งจะส่งผลให้ค่า $R_0<1$

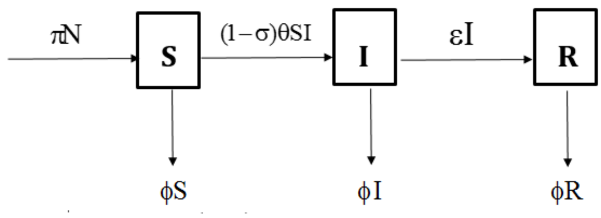
2) Local Asymptotically Stable ณ จุด E_1 ของจุดสมดุลที่มีโรค เป็นการตรวจสอบค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมตริกซ์ ณ สภาวะที่มีการแพร่ระบาดของโรค (E_1) ซึ่งจะได้สมการลักษณะเฉพาะจาก $\det(J_1-\lambda I)=0$ ซึ่ง J_1 คือจาโคเบียนเมตริกซ์ ณ จุด E_1 และ I คือเมตริกซ์เอกลักษณ์ กำหนดว่า λ ทุกค่าส่วนจริงจะเป็นลบซึ่งจะสอดคล้องตามเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz ซึ่งจะส่งผลให้ค่า $R_0>1$

3.3 การวิเคราะห์เชิงตัวเลข การวิเคราะห์เชิงตัวเลขเป็นหาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมที่ทำให้จุดสมดุลที่ไม่มีโรค และจุดสมดุลที่เกิดการแพร่ระบาดของโรค ที่ทำให้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์เป็น Local Asymptotically Stable เพื่อนำค่าพารามิเตอร์ไปคำนวณหาคำตอบเชิงตัวเลขโดยจำลองแบบด้วยโปรแกรม Matlab

ผลการวิจัย

ตอนที่ 1 ผลการพัฒนาผลของอัตราการสวมถุงยางอนามัยสำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโรคหนองในแท้

จากตัวแปรข้างต้นผู้วิจัยได้สร้างแผนภาพผลของอัตราการสวมถุงยางอนามัยสำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโรคหนองในแท้



รูปที่ 1 แผนภาพแสดงความสัมพันธ์และองค์ประกอบของการสวมถุงยางอนามัยสำหรับการป้องกันโรคหนองในแท้

$$\frac{dS}{dt} = \pi N - (1-\sigma)\theta SI - \phi S \tag{1}$$

$$\frac{dI}{dt} = (1-\sigma)\theta SI - \varepsilon I - \phi I \tag{2}$$

$$\frac{dR}{dt} = \varepsilon I - \phi R \tag{3}$$

โดยมีเงื่อนไขประชากรมนุษย์มีจำนวนคงที่ $N = S + I + R$ เมื่อกำหนดสัญลักษณ์ค่าพารามิเตอร์ ดังนี้ π เป็นอัตราการเกิดใหม่ของมนุษย์, θ เป็นอัตราการสัมผัสเชื้อ, ε เป็นอัตราการหาย, ϕ เป็นอัตราการตายโดยธรรมชาติ, σ เป็นอัตราการสวมถุงยางอนามัย, และ N เป็นจำนวนประชากรของมนุษย์ทั้งหมด เนื่องจากค่าอนุพันธ์ของค่าคงที่จะมีเป็นศูนย์ และค่าจำนวนของประชากรแต่ละกลุ่มจะมีค่าไม่เกิน N โดยดำเนินการดังนี้

1) การวิเคราะห์ตามแบบมาตรฐาน

จาก Rate of change = Rate inflow – Rate outflow จะได้

$$F(X) = \pi N - (1-\sigma)\theta SI - \phi S + (1-\sigma)\theta SI - \varepsilon I - \phi I + \varepsilon I - \phi R$$

ดังนั้น $\frac{dN}{dt} = \pi N - \phi S - \phi I - \phi R$

เมื่อ $S = N, I = 0, R = 0$

จะได้ $\frac{dN}{dt} = \pi N - \phi N - \phi(0) - \phi(0)$

$$\frac{dN}{dt} = \pi N - \phi N$$

$$\frac{dN}{dt} = (\pi - \phi) N$$

นั่นคือ N จะคงที่เมื่อ $\pi = \phi$

1.1) การหาจุดสมดุล จัดสมการอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้นของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ให้เท่ากับศูนย์ $\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0, \frac{dR}{dt} = 0$ ได้ดังนี้

$$0 = \pi N - (1-\sigma)\theta SI - \phi S \tag{4}$$

$$0 = (1-\sigma)\theta SI - \varepsilon I - \phi I \tag{5}$$

$$0 = \varepsilon I - \phi R \tag{6}$$

จะได้ $$S^* = \frac{\pi N}{(1-\sigma)\theta I^* + \phi} \tag{7}$$

$$I^* = \frac{\pi N}{\varepsilon + \phi} - \frac{\phi}{(1-\sigma)\theta} \tag{8}$$

$$R^* = \frac{\varepsilon I^*}{\phi} \tag{9}$$

1.1.1) การหาจุดสมดุลที่ไม่มีโรค

จากสมการ (1) - (3) จะได้ค่าจุดสมดุลที่ไม่มีโรค กรณีที่ไม่มีการติดเชื้อ ซึ่งกำหนดให้ $I = 0$, $S = N$ และ $R = 0$ ดังนั้น จุดสมดุลที่ไม่มีโรคจะได้ $E_0 = (S, I, R) = E_0(N, 0, 0)$ เสถียรภาพของระบบ (Stability of Systems) ที่จุด E_0 โดยดำเนินการหาลักษณะเฉพาะ $\det(J_0 - \lambda I_3) = 0$ เพื่อหาค่า λ เมื่อ λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะ และ I_3 คือเมตริกซ์เอกลักษณะขนาด 3×3 ดังนี้

$$J_0 \begin{bmatrix} -\phi & -(1-\sigma)\theta N & 0 \\ 0 & (1-\sigma)\theta N - \varepsilon - \phi & 0 \\ 0 & \varepsilon & -\phi \end{bmatrix}, \quad J_0 - \lambda I_3 \begin{bmatrix} (1-\sigma)\theta I - \phi - \lambda & -(1-\sigma)\theta N & 0 \\ (1-\sigma)\theta I & (1-\sigma)\theta N - \varepsilon - \phi - \lambda & 0 \\ 0 & \varepsilon & -\phi - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(J_0 - \lambda I_3) = (-\phi - \lambda)(-\phi - \lambda)((1-\sigma)\theta N - \varepsilon - \phi - \lambda)$$

จะได้ $(-\phi - \lambda) = 0$ หรือ $(-\phi - \lambda) = 0$ หรือ $((1-\sigma)\theta N - \varepsilon - \phi - \lambda) = 0$

จะได้ค่าสมการลักษณะเฉพาะดังนี้ $\lambda_1 = -\phi$, $\lambda_2 = -\phi$ และ $\lambda_3 = (1-\sigma)\theta N - \varepsilon - \phi$

ดังนั้น $(1-\sigma)\theta N - \varepsilon - \phi < 0$

1.1.2) การหาจุดสมดุลเกิดการแพร่ระบาดของโรค

จากสมการ (1), (2) และ (3) จะได้ค่าจุดสมดุลเกิดการแพร่ระบาดของโรค กรณีที่มีการแพร่ระบาดของโรค ซึ่งกำหนดให้ $I \neq 0$ และ $I > 0$ จาก $E_1(S^*, I^*, R^*) = \left(\frac{\pi N}{(1-\sigma)\theta I + \phi}, \frac{\pi N}{\varepsilon + \phi} - \frac{\phi}{(1-\sigma)\theta}, \frac{\varepsilon I^*}{\phi}\right)$ ดังนั้น สมการลักษณะเฉพาะที่จุด $E_1(S^*, I^*, R^*)$ โดยให้ $\det(J_1 - \lambda I_3) = 0$ เพื่อหาค่า λ เมื่อ λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen Values) และ I_3 คือเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 3×3 ดังนี้

$$J_1 = \begin{bmatrix} (1-\sigma)\theta I^* - \phi & -(1-\sigma)\theta N & 0 \\ (1-\sigma)\theta I^* & (1-\sigma)\theta N - \varepsilon - \phi & 0 \\ 0 & \varepsilon & -\phi \end{bmatrix}, J_1 - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} (1-\sigma)\theta I^* - \phi - \lambda & -(1-\sigma)\theta N & 0 \\ (1-\sigma)\theta I^* & (1-\sigma)\theta N - \varepsilon - \phi - \lambda & 0 \\ 0 & \varepsilon & -\phi - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(J_1 - \lambda I_3) = (-\phi - \lambda)\left[\lambda^2 - \lambda \underbrace{((1-\sigma)\theta N - \varepsilon - \phi + (1-\sigma)\theta I^* - \phi)}_{A} + \underbrace{((1-\sigma)\theta I^* - \phi)((1-\sigma)\theta N - \varepsilon - \phi)}_{B}\right]$$

จะได้ $0 = (-\phi - \lambda)$, $\lambda_1 = -\phi$ และ $0 = \lambda^2 - A\lambda + B$

โดยที่ $A = (1-\sigma)\theta N - \varepsilon - \phi + (1-\sigma)\theta I^* - \phi$, $B = ((1-\sigma)\theta I^* - \phi)((1-\sigma)\theta N - \varepsilon - \phi)$

$$\lambda_2 = \frac{A + \sqrt{A^2 - 4B}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{A - \sqrt{A^2 - 4B}}{2} \quad \text{โดยที่} \quad \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 4B}}{2} < 0$$

1.2) การหาค่าระดับการติดเชื้อ

การหาค่าระดับการติดเชื้อหาค่า Spectral Radius ของ FV^{-1} โดยใช้ Next Generation Method ได้จากสมการ (1) - (3) จะได้เมทริกซ์ในรูป $\frac{dX}{dt} = F(X) - V(X)$ เพื่อหาค่า Spectral Radius FV^{-1} ซึ่ง $F(X)$ และ $V(X)$ ได้จากอนุพันธ์ย่อย

กำหนด $F(X)$ คือ เมตริกซ์ของผู้ป่วยที่เพิ่มขึ้น , $V(X)$ คือ เมตริกซ์ของผู้ป่วยที่เปลี่ยนสถานะจากกลุ่มหนึ่งไปอีกกลุ่มหนึ่ง ซึ่งพิจารณาค่าระดับการติดเชื้อ R_0 ดังนี้

$$F(X) = \begin{bmatrix} 0 \\ (1-\sigma)\theta I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V(X) = \begin{bmatrix} -\pi N + (1-\sigma)\theta SI + \phi S \\ \varepsilon I + \phi I \\ -\varepsilon I + \phi R \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $F(E)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ (1-\sigma)\theta I & (1-\sigma)\theta S & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $V(E)=\begin{bmatrix}(1-\sigma)\theta I+\phi & (1-\sigma)\theta S & 0\\ 0 & \varepsilon+\phi & 0\\ 0 & -\varepsilon & \phi\end{bmatrix}$

ให้ $E_0(S,I,R)=(N,0,0)$

จะได้ $F(E_0)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & (1-\sigma)\theta N & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $V(E_0)=\begin{bmatrix}\phi & (1-\sigma)\theta N & 0\\ 0 & \varepsilon+\phi & 0\\ 0 & -\varepsilon & \phi\end{bmatrix}$

$$M(V(E_0))=\begin{Vmatrix}\begin{vmatrix}\varepsilon+\phi & 0\\ -\varepsilon & \phi\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & \phi\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & \varepsilon+\phi\\ 0 & -\varepsilon\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}(1-\sigma)\theta N & 0\\ -\varepsilon & \phi\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}\phi & 0\\ 0 & \phi\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}\phi & (1-\sigma)\theta N\\ 0 & -\varepsilon\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}(1-\sigma)\theta N & 0\\ \varepsilon+\phi & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}\phi & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}\phi & (1-\sigma)\theta N\\ 0 & \varepsilon+\phi\end{vmatrix}\end{Vmatrix}$$

$$M=\begin{vmatrix}(\varepsilon+\phi)\phi & 0 & 0\\ (1-\sigma)\theta N\phi & \phi^2 & -\varepsilon\phi\\ 0 & 0 & (\varepsilon+\phi)\phi\end{vmatrix} \quad , \quad C=\begin{vmatrix}(\varepsilon+\phi)\phi & 0 & 0\\ -(1-\sigma)\theta N\phi & \phi^2 & -\varepsilon\phi\\ 0 & 0 & (\varepsilon+\phi)\phi\end{vmatrix}$$

$$\det V=\phi\begin{vmatrix}\varepsilon+\phi & 0\\ -\varepsilon & \phi\end{vmatrix}=\phi(\varepsilon+\phi)\phi=\phi^2(\varepsilon+\phi)$$

$$V^{-1}(E_0)=\begin{vmatrix}(\varepsilon+\phi)\phi & -(1-\sigma)\theta N\phi & 0\\ 0 & \phi^2 & 0\\ 0 & -\varepsilon\phi & (\varepsilon+\phi)\phi\end{vmatrix}\bullet\frac{1}{\phi^2(\varepsilon+\phi)}$$

พิจารณา $\rho\left[FV^{-1}(E_0)\right]$

จะได้ $$\rho\left[FV^{-1}(E_0)\right]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & (1-\sigma)\theta N\phi^2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\bullet\frac{1}{\phi^2(\varepsilon+\phi)}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{(1-\sigma)\theta N\phi^2}{\phi^2(\varepsilon+\phi)} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\frac{(1-\sigma)\theta N}{(\varepsilon+\phi)}$$

ดังนั้น คำนวณหาค่า Spectral Radius ของ $FV^{-1}(E_0)$ เขียนแทนค่าด้วย $\rho\left[FV^{-1}(E_0)\right]=\dfrac{(1-\sigma)\theta N}{(\varepsilon+\phi)}$

จะได้ $R_0=\dfrac{(1-\sigma)\theta N}{(\varepsilon+\phi)}$ ดังนั้นจุดสมดุลที่มีโรคมีเสถียรภาพ เมื่อ $R_0>1$ โดย $R_0=\dfrac{(1-\sigma)\theta N}{(\varepsilon+\phi)}$

พิจารณา ดังนี้

1)ค่า R_0 ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรคมีค่า $R_0<1$ จะไม่เกิดการแพร่ระบาด

2)ค่า R_0 ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรคมีค่า $R_0>1$ จะเกิดการแพร่ระบาด

ตอนที่ 2 การวิเคราะห์เชิงตัวเลขของผลของอัตราการสวมถุงยางอนามัยสำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโรค หนองในแท้

การวิจัยในครั้งนี้ผู้วิจัยได้ทำการวิเคราะห์เชิงตัวเลข โดยนำค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการสำรวจข้อมูลเกี่ยวกับการระบาดของโรคหนองในแท้ ซึ่งมีค่าต่างๆ ดังนี้

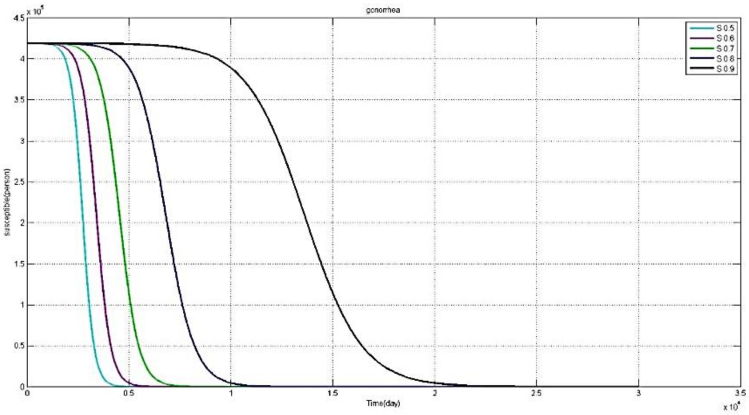
ตารางที่ 1 ค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการสำรวจข้อมูลเกี่ยวกับการแพร่ระบาดของโรคหนองในแท้

ข้อความ	สัญลักษณ์	ค่าพารามิเตอร์	หน่วย
จำนวนประชากรของมนุษย์ทั้งหมด	N	416,582	คน
อัตราการเกิดใหม่	π	0.00004818	ต่อวัน
อัตราการตายโดยธรรมชาติ	ϕ	0.00001770	ต่อวัน
อัตราการสัมผัสเชื้อ	θ	0.00000908	ต่อวัน
อัตราการหาย	ε	0.000000648	ต่อวัน
อัตราการสวมถุงยางอนามัย	σ	0.5-0.9	

*สำนักงานสาธารสุขจังหวัดภูเก็ต

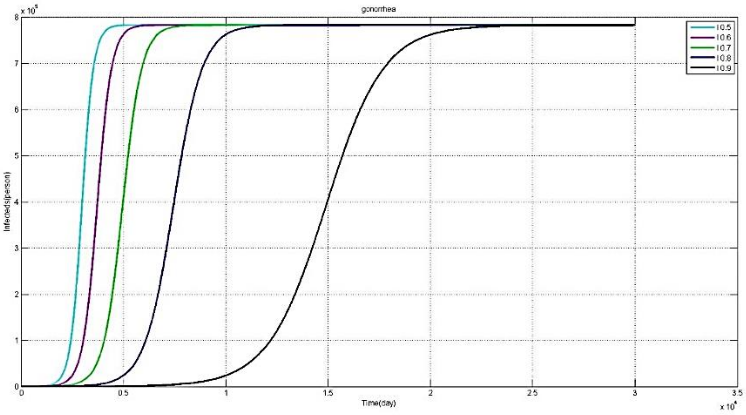
เมื่อพิจารณาเสถียรภาพของระบบ ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรค จะพบว่าค่าลักษณะเฉพาะทุกค่ามีส่วนจริงเป็นค่าลบ และสอดคล้องกับเงื่องไขของ Routh-Hurwitz จะส่งผลให้คำตอบจะลู่เข้าสู่ $E_0(N,0,0)$ ดังนั้นจุดสมดุลไม่มีโรค E_0 จะเป็น Local Asymptotically (Fred Brauer, Pauline den Driessche and Jianhong Wu)

เมื่อพิจารณาเสถียรภาพของระบบ ณ จุดสมดุลที่มีโรค จะพบว่าค่าลักษณะเฉพาะทุกค่ามีส่วนจริงเป็นค่าลบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz จะส่งผลให้คำตอบจะลู่เข้าสู่ $E_1 = \left(S^*, I^*, R^*\right)$ ดังนั้นจุดสมดุลมีโรค E_1 จะเป็น Local Asymptotically



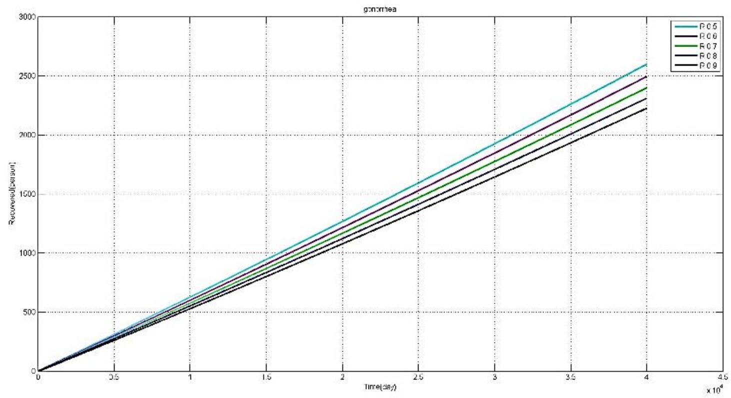
รูปที่ 2 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มเสี่ยง (S) ณ เวลา t ใดๆเมื่อค่า $\sigma = 0.5 - 0.9$ ตามลำดับ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลมีเชื้อ

จากรูปที่ 2 เมื่อเพิ่มอัตราการสวมถุงยางอนามัยสำหรับการป้องกันโรคหนองในแท้ (σ) ลงในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการสวมถุงยางอนามัยสำหรับการป้องกันโรคหนองในแท้ให้มากขึ้นจะพบว่า อัตราเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มเสี่ยง (S) ณ เวลา t ใดๆ จะค่อยๆลดลงและเปลี่ยนแปลงอย่างช้าๆ ถ้าประชากรมีการสวมถุงยางอนามัยสำหรับการป้องกันโรคหนองในแท้เป็นจำนวนมากขึ้นจะส่งผลให้จำนวนประชากรกลุ่มเสี่ยงลดลงอย่างช้าๆ



รูปที่ 3 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มติดเชื้อ $\left(\mathrm{I}\right)$ ณ เวลา t ใดๆ เมื่อค่า $\sigma = 0.5 - 0.9$ ตามลำดับ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลมีเชื้อโรค

จากรูปที่ 3 เมื่อเพิ่มอัตราการสวมถุงยางอนามัยสำหรับการป้องกันโรคหนองในแท้ $\left(\sigma\right)$ ลงในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการสวมถุงยางอนามัยสำหรับการป้องกันโรคหนองในแท้ให้มากขึ้นจะพบว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มติดเชื้อ $\left(\mathrm{I}\right)$ ณ เวลา t ใดๆ ลดลงอย่างเห็นได้ชัดขึ้น ถ้าประชากรมีการสวมถุงยางอนามัยสำหรับการป้องกันเป็นจำนวนมากขึ้นจะส่งผลให้กลุ่มติดเชื้อลดลง



รูปที่ 4 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรที่หายป่วยจากโรค $\left(\mathrm{R}\right)$ ณ เวลา t ใดๆ เมื่อค่า $\sigma = 0.5 - 0.9$ ตามลำดับ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลมีโรค

จากรูปที่ 4 เมื่อเพิ่มอัตราการสวมถุงยางอนามัยสำหรับการป้องกันโรคหนองในแท้ $\left(\sigma\right)$ ลงในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการสวมถุงยางอนามัยสำหรับการป้องกันโรคหนองในแท้ จะส่งผลให้จำนวนประชากรกลุ่มติดเชื้อเปลี่ยนเป็นกลุ่มที่หายป่วยจากโรคเร็วขึ้น เนื่องจากจำนวนประชากรติดเชื้อน้อยลงจะส่งผลให้เกิดการแพร่ระบาดลดลง

จากการศึกษาพบว่าอัตราการสวมถุงยางอนามัยสำหรับการป้องกัน เป็นผลปัจจัยหนึ่งต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการสวมถุงยางอนามัยสำหรับการป้องกันโรคหนองในแท้ ซึ่งพบว่าถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีการสวมถุงยางอนามัยสำหรับป้องกันน้อย จะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคเพิ่มขึ้น ถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีการสวมถุงยางอนามัยป้องกันเป็นจำนวนมากขึ้นจะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคลดลง จนกระทั่งไม่มีการแพร่ระบาดของเชื้อ

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

วิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาผลของอัตราการสวมถุงยางอนามัยสำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโรคหนองในแท้และวิเคราะห์เสถียรภาพของผลของอัตราการสวมถุงยางอนามัยสำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโรคหนองในแท้ ตัวแบบ เชิงคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการวิจัยในครั้งนี้ คือ ระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น ซึ่งประกอบด้วย ประชากรที่เสี่ยงต่อการติ ดเชื้อ

ประชากรที่ติดเชื้อและสามารถแพร่เชื้อได้และประชากรที่หายป่วยจากโรค ซึ่งผู้วิจัยเพิ่มค่าพารามิเตอร์ (σ) คือ อัตราการสวมถุงยางอนามัย ลงในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ใช้วิธีการวิเคราะห์วิธีมาตรฐานและวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับตรวจสอบการแพร่ระบาดของโรค

ผู้วิจัยได้พิจารณาจุดสมดุลที่มีโรคและจุดสมดุลที่เกิดการแพร่ระบาดของโรค โดยการวิเคราะห์จุดสมดุลและเสถียรภาพของจุดสมดุลด้วยวิธีการวิเคราะห์วิธีมาตรฐาน ซึ่งค่าเสถียรภาพของระบบ Local Asymptotical Stable ที่ได้ต้องเป็นไปตามเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz เพื่อให้สามารถหาค่าพารามิเตอร์ R_0 ซึ่งมีความจำเป็นภายใต้เงื่อนไขเพื่อให้ Local Asymptotically Stability of Equilibrium State ที่มีเสถียรภาพในส่วนของจุดสมดุลที่มีการแพร่ระบาดของโรคโดยที่ $R_0 = \frac{(1-\sigma)\theta N}{(\varepsilon+\phi)}$ สามารถพิจารณาค่าระดับการติดเชื้อ R_0 โดยค่า $R_0 < 1$ วิเคราะห์ได้ว่า ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรคจึงไม่เกิดการแพร่ระบาดของโรค และค่า $R_0 > 1$ วิเคราะห์ได้ว่า ณ จุดสมดุลมีการติดเชื้อจึงเกิดการแพร่ระบาดของโรค จากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขพบว่าจุดสมดุลทั้งสองเป็น Local Asymptotical Stable ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรค $(\sigma) = 0.5 - 0.9$

จากการวิจัยพบว่าอัตราการสวมถุงยางอนามัยสำหรับการป้องกันเป็นผลปัจจัยหนึ่งที่ส่งผลต่อการเปลี่ยนแปลงของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ SIR สำหรับการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคหนองในแท้ โดยพบว่าถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อโรคหนองในแท้มีการสวมถุงยางน้อยสำหรับการป้องกันน้อย จะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคเพิ่มขึ้นและถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อโรคหนองในแท้มีการสวมถุงยางอนามัยสำหรับการป้องกันจำนวนมากขึ้น จะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคลดลงจนกระทั่งไม่มีการแพร่ระบาดของเชื้อโรคหนองในแท้

ดังนั้นสามารถนำผลจากการวิจัยตัวแบบคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการสวมถุงยางอนามัยสำหรับการป้องกันโรคหนองในแท้นำไปใช้เป็นข้อมูลเบื้องต้นในการป้องกันโรคเพื่อลดจำนวนผู้ป่วยและใช้เป็นข้อมูลทางวิชาการให้กับหน่วยงานที่เฝ้าระวังของ สำนักระบาดวิทยา กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุข รวมทั้งนำเสนอข้อมูลต่อหน่วยงานด้านสาธารณสุขดำเนินการหามาตรการควบคุมและป้องกันโรคหนองในแท้โดยการแจกถุงยางอนามัยกับประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ

เอกสารอ้างอิง

กรมควบคุมโรค.(2562).*จำนวนผู้โรคหนองในแท้.* สำนักระบาดวิทยา กระทรวงสาธารณสุขจังหวัดภูเก็ต

กรมควบคุมโรค.(2563).*โรคหนองใน.*สำนักระบาดวิทยา กระทรวงสาธารณสุข

สุกัลยา ศรีสุริฉัน.(2559). *การสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์,* จาก.http://elearning.nsru.ac.th/web_elearning/math_model/

สร้อยสน สกลรักษ์. (2560) *ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์.* วารสารครุศาสตร์มหาวิทยาลัยจุฬาลงกรณ์ ปีที่45 ฉบับที่ 2. ประจำเดือนเมษายน-มิถุนายน 2560.

อนุวัตร จิรวัฒนาพาณิชและคณะ.(2562).*ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการรณรงค์ป้องกันการแพร่ระบาดของโรคตาแดง* (รายงานการวิจัย).ภูเก็ต: มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต

อัพฎางค์ (255R-2562) *โรคติดต่อทางเพศสมพันธ์ที่ดีที่สุดคือการใช้ถุงยางอนามัยทุกครั้งเมื่อมีเพสสัมพันธ์.* [Online]. http://www.voicetv.co.th/read/saz9E3WPw , (30 สิงหาคม 2563)

Fred Brauer,Pauline den Driessche and Jianhong Wu. *Mathematical Epidemiology*. จาก http://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-540-78911-6

Jantrapron Sukawat and Surapol Naowarat. (2014). *Effect of Rainfall on the transmission Model of Conjunctivitis. Advened in Enviraonmental*. Biology, 8(14) :99-104