การศึกษาอัตราการฉีดวัคซีนในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการป้องกันโรคอีสุกอีใส กรณีศึกษาจังหวัดภูเก็ต

A Mathematical Model of Vaccination Rates for Chickenpox Prevention case study in Phuket

ภาวิณี ศรีเรือง[1*], กันตภณ ชัยเสนา[2] และอนุวัตร จิรวัฒนพาณิช[3]

Pawinee Srirueang[1*], Kantapon Chaisena[2] and Anuwat Jirawattanapanit[3]

[1] นักศึกษาระดับปริญญาตรี, หลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต, สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์, มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต

[1] Undergraduate students, Bachelor of Science Program, Applied Mathematics, Phuket Rajabhat University.

[2] สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์, คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต

[2] Applied Mathematics, Faculty of Science and Technology, Phuket Rajabhat University.

[3] สาขาคณิตศาสตร์, คณะครุศาสตร์, มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต

[3] Mathematics, Faculty of Education, Phuket Rajabhat University.

[*]**Corresponding author, E-mail:** S6112229106@pkru.ac.th

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาและวิเคราะห์เสถียรภาพของอัตราการฉีดวัคซีนในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการป้องกันโรคอีสุกอีใส โดยใช้วิธีการวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐาน ศึกษาจุดสมดุล ศึกษาเสถียรภาพของจุดสมดุล หาคำตอบเชิงวิเคราะห์ โดยศึกษาอัตราการฉีดวัคซีนในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์และหาคำตอบเชิงตัวเลข ผลวิจัยพบว่าจุดสมดุลที่ไม่มีโรคและจุดสมดุลที่มีโรคเป็น Local asymptotically Stable และมีค่าระดับการติดเชื้อเป็น $R_0 = \frac{HN}{M+K^2}$ และอัตราการฉีดวัคซีนเป็นปัจจัยที่มีผลต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีการฉีดวัคซีนป้องกันเป็นจำนวนมากจะส่งผลให้การแพร่ระบาดโรคลดลง

คำสำคัญ: ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์, โรคอีสุกอีใส, การฉีดวัคซีนป้องกัน

Abstract

The purpose of this research was to develop and analyze the stability of vaccination rate studies in a mathematical model for chickenpox prevention which analyzed the model using standard analytical methods study the equilibrium point Study the stability of the equilibrium point. Analytical answers by studying the vaccination rates in a mathematical model and finding numerical answers. The results showed that the disease-free equilibrium and the disease-associated equilibrium were local asymptotically stable and the infection level was $R_0 = \frac{HN}{M+K^2}$ and the vaccination rate was a factor affecting the mathematical model. If a population at risk of infection has a large number of vaccinations, this will reduce the spread of the disease.

Keywords: mathematical model, chickenpox, preventive vaccination

บทนำ

คณิตศาสตร์ได้เข้ามามีบทบาทเกี่ยวข้องในการดำรงชีวิตของมนุษย์ สามารถนำมาประยุกต์ใช้ได้หลากหลาย โดยเฉพาะทางการแพทย์สามารถประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์เพื่อจำลองการเกิดโรคและการรักษาโรคต่าง ๆ รวมทั้งเป็นเครื่องมือช่วยทำความเข้าใจเกี่ยวกับสุขภาพหลายๆด้าน อาทิ สภาพแวดล้อมที่ทำให้เกิดโรคต่าง ๆ การป้องกันโรค การทดสอบปริมาณยา เป็นต้น ปัจจุบันการเปลี่ยนแปลงของสภาพภูมิอากาศ สิ่งแวดล้อมเป็นสาเหตุทำให้เกิดโรคที่ติดต่อได้ง่ายมีการแพร่ระบาดอย่างรวดเร็วส่งผลต่อสุขภาพทำให้มนุษย์เสียชีวิตได้ง่าย ดังนั้นจำเป็นต้องอาศัยเครื่องมือทางคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์มาประยุกต์ใช้แก้ปัญหาช่วยให้มนุษย์มีคุณภาพชีวิตที่ดีขึ้น (อนุวัตร จิรวัฒนาพาณิชและคณะ 2562)

จากการศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์แสดงให้เห็นถึงบทบาทและประโยชน์ของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่มีส่วนช่วยในการแก้วิกฤตการณ์ที่กำลังเกิดขึ้นจากโรคภัยต่าง ๆ โดยจะจำลองประชากรที่เสี่ยงต่อการติดต่อเชื้อ ตัวเชื้อโรคตัวพาหะนำโรค และผู้ติดเชื้อ โดยแปลงข้อมูลให้อยู่ในรูปสมการทางคณิตศาสตร์ เพื่ออธิบายลักษณะของการระบาดและการดำเนินของโรคโดยที่ผู้วิจัยไม่จำเป็นต้องไปศึกษากับมนุษย์โดยตรงซึ่งอาจเกิดอันตรายต่อชีวิตของผู้วิจัยและผู้ป่วยได้อีก ทั้งยังช่วยลดลงงบประมาณสำหรับการเสริมมาตรการการรักษาและการป้องกันโรคตามความต้องการที่แท้จริงได้อย่างรวดเร็วและเหมาะสมมากที่สุดด้วย (ธีรวัฒน์ นาคะบุตร, 2546)

โรคอีสุกอีใสมีลักษณะอาการเป็นผื่นแดงราบ ตุ่มใส ตุ่มหนอง กระจายตามหน้า ลำตัว และแผ่นหลัง และมีไข้ เกิดจากเชื้อ ไวรัสที่มีชื่อว่า ไวรัสวาริเซลลา (Varicella virus) หรือ Human herpes virus type 3 เป็นเชื้อ ไวรัสชนิดเดียวกับที่ทำให้เกิดงูสวัด ติดต่อโดยการสัมผัสถูกตุ่มน้ำโดยตรงหรือสัมผัสถูกของใช้ เช่น แก้วน้ำ ผ้าเช็ดหน้า ผ้าเช็ดตัว ผ้าห่ม ที่นอน เป็นต้น ที่เปื้อนถูกตุ่มน้ำของคนที่เป็นอีสกุอีใส

หรืองูสวัดหรือสูดหายใจเอาละอองของตุ่มน้ำผ่านเข้าทางเยื่อเมือก ระยะฟักตัว 10-20 วันในรายที่เป็นงูสวัดสามารถติดต่อในรูปแบบของอีสุกอีใสได้โดยเฉพาะมารดาที่ให้นมบุตร (อภิชาต ศิวยาธร, 2550)

อาการของโรคมักจะมีไข้สูง มีอาการปวดเมื่อยตามเนื้อตัวคล้ายไข้หวัด ขณะเดียวกันจะมีผื่นขึ้นพร้อมกับวัน ที่เริ่มมีไข้หรือหนึ่งวันหลังมีไข้โดยในระยะแรกจะขึ้นเป็นผื่นแดงราบก่อน ต่อมาจะกลายเป็นตุ่มนูน มีน้ำใส ๆ และคัน ต่อมาอีก 2-3 วันจะตกสะเก็ด ผื่นและตุ่มเหล่านี้จะขึ้นตามไรผมก่อนแล้วกระจายไปตามใบหน้าลำตัว และแผ่นหลัง บางคนจะมีตุ่มขึ้นในช่องปากทำให้ปากและลิ้นเปื่อย จะเกิดอาการเจ็บคอบางคนอาจไม่มีไข้ มีเพียงผื่นและตุ่มขึ้นเท่านั้น เด็กวัยรุ่นและผู้ใหญ่มักจะมีอาการรุนแรงและมีตุ่มขึ้นมากกว่าเด็ก โดยทั่วไปผื่นจะหายได้โดยไม่มีแผลเป็น โรคนี้เมื่อหายแล้วมักจะมีเชื้อหลบซ้อนอยู่ที่ปมประสาท ซึ่งอาจจะออกมาเป็นงูสวัดในภายหลังได้ (สำนักระบาดวิทยา, 2559)

จากเหตุข้างต้นผู้วิจัยได้ตระหนักและเห็นประโยชน์ที่ได้รับจึงทำการวิจัยเรื่อง การศึกษาอัตราการฉีดวัคซีนในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการป้องกันโรคอีสุกอีใส ซึ่งผู้วิจัยได้เพิ่มตัวแปรอัตราการฉีดวัคซีนเป็นปัจจัยสำหรับการศึกษาในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ เพื่อสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับป้องกันและควบคุมโรคอีสุกอีใสที่มีประสิทธิภาพสูงขึ้น

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของอัตราการฉีดวัคซีนสำหรับการป้องกันโรคอีสุกอีใส กรณีศึกษาจังหวัดภูเก็ต

2. เพื่อวิเคราะห์เสถียรภาพของการศึกษาอัตราการฉีดวัคซีนในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการป้องกันโรคอีสุกอีใส กรณีศึกษาจังหวัดภูเก็ต

วิธีดำเนินการวิจัย

การศึกษาวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาอัตราการฉีดวัคซีนในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการป้องกันโรคอีสุกอีใสที่สอดคล้องกับกลุ่มประชากรและลักษณะของการเกิดโรค ซึ่งมีวิธีการดำเนินการวิจัย 3 ขั้นตอนดังนี้

1. การพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยได้แบ่งประชากรออกเป็น 3 กลุ่ม คือ กลุ่มประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ กลุ่มประกรที่ติดเชื้อ และกลุ่มประชากรที่หายป่วยจากโรค ผู้วิจัยได้กำหนดตัวแปรดังนี้ $S(t)$ จำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ณ t เวลาใด ๆ , $I(t)$ จำนวนประชากรที่ติดเชื้อ ณ t เวลาใด ๆ , $R(t)$ จำนวนประชากรที่หายป่วยจากโรค ณ t เวลาใด ๆ โดย $S(t)>0$, $I(t)>0$,และ $R(t)>0$ เนื่องจากประชากรรวมมีค่าคงที่ไม่ขึ้นกับเวลาคือ $N(t)=S(t)+I(t)+R(t)$ ซึ่งเป็นค่าคงที่

2. ตรวจสอบตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ การตรวจสอบการศึกษาอัตราการฉีดวัคซีนในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับป้องกันโรคอีสุกอีใส เป็นการตรวจสอบความถูกต้องของตัวแบบโดยเชี่ยวชาญที่เกี่ยวข้อง กับศาสตร์นี้โดยตรง ได้แก่ นักระบาดวิทยาและนักคณิตศาสตร์

3. การวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ การวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เป็นการวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐาน (standard method) โดยศึกษาจุดสมดุลและศึกษาเสถียรภาพของจุดสมดุลเพื่อหาเงื่อนไขของพารามิเตอร์ที่เหมาะสมของจุดสมดุล หาค่าระดับการติดเชื้อโดยใช้วิธี Next Generations Method หาคำตอบเชิงวิเคราะห์และหาคำตอบเชิงตัวเลข โดยวิธี Numerical Analysis ดังวิธีการต่อไปนี้

3.1 การวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐาน การวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐานเป็นการศึกษาจุดสมดุล ค่าระดับการติดเชื้อ และเสถียรภาพของระบบ ดังนี้

3.1.1 การหาขอบเขตของค่าคงที่ เป็นการหาขอบเขตของค่าคงที่และช่วงคำตอบที่เป็นจำนวนจริงบวก โดยการใช้เทคนิคการอินทิเกรดช่วยแสดงช่วงคำตอบของ $S(t), I(t)$ และ $R(t)$ จะมีขอบเขตของค่าคงที่ (Invariant Region) อยู่ในช่วงจำนวนจริง

3.1.2 จุดสมดุล การหาจุดสมดุลดำเนินการโดยจัดสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ให้เท่ากับศูนย์ คือ $\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0, \frac{dR}{dt} = 0$ จะได้ค่าจุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อโรค (Disease Free Equilibrium Point: E_0) ในกรณีที่ไม่มีการติดเชื้อโรค โดยกำหนดให้ $E_0(S, I, R) = E_0(N, 0, 0)$ และจะได้ค่าจุดสมดุลเกิดการแพร่ระบาดของเชื้อโรค (Endemic Equilibrium Point: E_1) ในกรณีที่มีการระบาดของเชื้อโรค โดยกำหนดให้ $I \neq 0$, จะได้ $E_1(S, I, R) = E_1(S^*, I^*, R^*)$

3.1.3 การหาค่าระดับการติดเชื้อ (R_0) ค่าระดับการติดเชื้อเป็นค่าเฉลี่ยที่ผู้ป่วยหนึ่งคนสามารถทำให้คนกลุ่มเสี่ยงป่วยเป็นจำนวนกี่คนในช่วงเวลาที่เขายังป่วยอยู่ โดยใช้วิธี Next Generation Method โดยจัดการสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นในรูป $\frac{dX}{dt} = F(X) - V(X)$ เพื่อหาค่า R_0 จากเมตริกซ์ $\rho(FV^{-1})$ ซึ่ง $F(X)$ คือ เมตริกซ์ของผู้ป่วยที่เพิ่มขึ้น , $V(X)$ คือ เมตริกซ์ของผู้ป่วยที่เปลี่ยนสถานะจากกลุ่มหนึ่งไปอีกกลุ่มหนึ่ง ได้จากอนุพันธ์ย่อย (Partial Derivative) ดังนี้

$X = \begin{bmatrix} S \\ I \\ R \end{bmatrix}$, $F = \left[\frac{\partial F_i(E_0)}{\partial X_i}\right]$ และ $V = \left[\frac{\partial V_i(E_0)}{\partial X_i}\right]$ โดยพิจารณา R_0 ดังนี้

1) ถ้า $R_0 > 1$ แสดงว่า โรคมีการระบาดเพิ่มขึ้น (Epidemic)
2) ถ้า $R_0 = 1$ แสดงว่า โรคเริ่มเสถียร (Endemic)
3) ถ้า $R_0 < 1$ แสดงว่า โรคไม่มีการระบาด

3.2 การวิเคราะห์เสถียรภาพ เป็นการค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen Value) เพื่ออธิบายคำตอบของสมการเกี่ยวกับค่าความสมดุลสำหรับการตรวจสอบว่าเป็น Local Asymptotically Stable มี 2 กรณี ดังนี้

1) Local Asymptotically Stable ณ จุด E_0 ของจุดสมดุลที่ไม่มีโรค โดยการตรวจสอบค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมตริกซ์ ณ สภาวะที่ไม่มีโรค (E_0) ซึ่งจะได้สมการลักษณะเฉพาะจาก $\det(J_0 - \lambda I) = 0$ ซึ่ง J_0 คือจาโคเบียนเมตริกซ์ ณ จุด E_0 และ I คือเมตริกซ์เอกลักษณ์ โดยมีข้อกำหนดว่า λ ทุกค่าส่วนจริงจะเป็นลบซึ่งจะสอดคล้องตามเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz ซึ่งจะส่งผลให้ค่า $R_0 < 1$

2) Local Asymptotically Stable ณ จุด E_1 ของจุดสมดุลที่มีโรค โดยการตรวจสอบค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมตริกซ์ ณ สภาวะที่มีการแพร่ระบาดของโรค (E_1) ซึ่งจะได้สมการลักษณะเฉพาะจาก $\det(J_1 - \lambda I) = 0$ ซึ่ง J_1 คือจาโคเบียนเมตริกซ์ ณ จุด E_1 และ I คือเมตริกซ์เอกลักษณ์ โดยมีข้อกำหนดว่า λ ทุกค่าส่วนจริงจะเป็นลบซึ่งจะสอดคล้องตามเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz ซึ่งจะส่งผลให้ค่า $R_0 > 1$

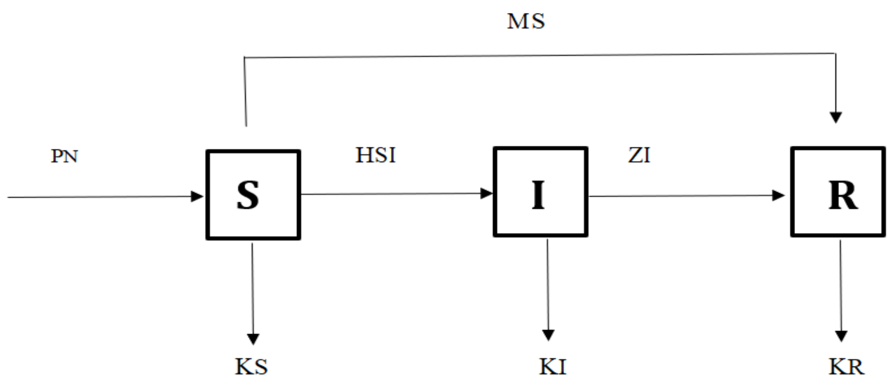
3.3 การวิเคราะห์เชิงตัวเลข

การวิเคราะห์เชิงตัวเลขเป็นการพิจารณาหาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมที่ทำให้จุดสมดุลที่ไม่มีโรค (Disease Free Equilibrium Point: E_0) และจุดสมดุลที่เกิดการแพร่ระบาดของโรค (Endemic Equilibrium Point: E_1) ที่ทำให้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์เป็น Local Asymptotically Stable เพื่อนำค่าพารามิเตอร์ไปคำนวณหาคำตอบเชิงตัวเลขโดยจำลองแบบด้วยโปรแกรม Matlab (สุกัลยา ศรีสุริฉัน, 2559)

ผลการวิจัย

ตอนที่1 ผลการพัฒนาการศึกษาอัตราการฉีดวัคซีนในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการป้องกันโรคอีสุกอีใส

จากตัวแปรข้างต้นผู้วิจัยได้สร้างแผนภาพการศึกษาอัตราการฉีดวัคซีนในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการป้องกันโรคอีสุกอีใส



รูปที่ 1 แผนภาพความสัมพันธ์และองค์ประกอบของการฉีดวัคซีนสำหรับการป้องกันโรคอีสุกอีใส

จากรูปที่ 1 สามารถเปลี่ยนตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น (Ordinary differential equation: ODE) (Kermack and McKendrick, 1927) ดังนั้น

$$\frac{dS}{dt} = PN - MS - HSI - KS \tag{1}$$

$$\frac{dI}{dt} = HSI - ZI - KI \tag{2}$$

$$\frac{dR}{dt} = ZI + MS - KR \tag{3}$$

โดยมีเงื่อนไขประชากรมนุษย์มีจำนวนคงที่ $N = S + I + R$ เมื่อกำหนดสัญลักษณ์พารามิเตอร์ ได้แก่ P เป็นอัตราการเกิด, H เป็นอัตราการติดเชื้อ, Z อัตราการหาย, K อัตราการตายโดยธรรมชาติ, M อัตราการฉีดวัคซีน และ N เป็นจำนวนประชากรของมนุษย์ทั้งหมด เนื่องจากค่าอนุพันธ์ของค่าคงที่จะมีค่าเป็นศูนย์ และค่าจำนวนของประชากรแต่ละกลุ่มจะมีค่าไม่เกิน N โดยดำเนินการดังนี้

1) การวิเคราะห์ตามแบบมาตรฐาน

จาก Rate of change = Rate inflow – Rate outflow จะได้

$$F(X) = PN - MS - HSI - KS + HSI - ZI - KI + ZI - MS - KR$$

ดังนั้น $$\frac{dN}{dt} = PN - KS - KI - KR$$

เมื่อ $$S = N, I = 0, R = 0$$

จะได้ $$\frac{dN}{dt} = PN - KN - K(0) - K(0)$$

$$\frac{dN}{dt} = PN - KN$$

$$\frac{dN}{dt} = N(P-K)$$

แสดงว่า N เป็นค่าคงที่ เมื่อ $P = K$

1.1) การหาจุดสมดุล โดยจัดสมการอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้นของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ให้เท่ากับศูนย์จะได้ $\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0, \frac{dR}{dt} = 0$ ได้ดังนี้

$$PN - MS - HSI - KS = 0$$

$$-MS - HSI - KS = -PN$$

$$MS + HSI + KS = PN$$

$$(M + HI + K)S = PN$$

จะได้ $$S^* = \frac{PN}{M + HI + K} \tag{4}$$

$$I^{*}=\frac{PN(H)-M(ZK)-K(Z+K)}{H(Z+K)} \quad (5)$$

$$R^{*}=\frac{ZI-MS}{K} \quad (6)$$

1.1.1) การหาจุดสมดุลที่ไม่มีโรค (E_0)

จากสมการ (1) , (2) และ (3) จะได้ค่าจุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อโรค (Disease Free Equilibrium Point: E_0) ในกรณีที่ไม่มีการติดเชื้อ โดยกำหนดให้ $I=0$, $S=N$ และ $R=0$ ดังนั้น จุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อโรคจะได้ $E_0(S,I,R)=E_0(N,0,0)$ เสถียรภาพของระบบ (Stability of Systems) ที่จุด E_0 โดยดำเนินการหาลักษณะเฉพาะ $\det(J_0-\lambda I_3)=0$ เพื่อหาค่า λ เมื่อ λ เป็นลักษณะเฉพาะ (Eigen Values) และ I_3 คือ เมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 3×3 ดังนี้

$$J_0=\begin{bmatrix} M-K & HN & 0 \\ 0 & HN-Z & 0 \\ M & Z & -K \end{bmatrix}$$

$$J_0-\lambda I_3=\begin{bmatrix} M-K & HN & 0 \\ 0 & HN-Z & 0 \\ M & Z & -K \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$J_0-\lambda I_3=\begin{bmatrix} -1-K-\lambda & HN & 0 \\ 0 & HN-Z-\lambda & 0 \\ M & Z & -K-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(J_0-\lambda I_3)=\begin{vmatrix} -1-K-\lambda & HN & 0 \\ 0 & HN-Z-\lambda & 0 \\ M & Z & -K-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$0=(-K-\lambda)\left[(1-K-\lambda)(HN-Z-\lambda)-0\right]$$

$$0=(-K-\lambda)(1-K-\lambda)\left[(HN-Z-\lambda)\right]$$

จะได้ $(-K-\lambda)=0$ หรือ $(1-K-\lambda)=0$ หรือ $(HN-Z-\lambda)=0$

1.1.2) การหาจุดสมดุลเกิดการแพร่ระบาดของโรค (E_1)

จากสมการ (1) , (2) และ 3 จะได้ค่าจุดสมดุลเกิดการแพร่ระบาดของเชื้อโรค (Endemic Equilibrium Point: E_1) ในกรณีที่มีการแพร่ระบาดของเชื้อโรค โดยกำหนดให้ $I>0$ และ $S=N$ ซึ่งได้

จาก $E_1=(S^*,I^*,R^*)=\left(\frac{PN}{M+HI+K},\frac{PN(H)-M(Z+K)-K(Z+K)}{H(Z+K)},\frac{ZI-MS}{K}\right)$

ดังนั้น สมการลักษณะเฉพาะที่จุด $E_1 = (S^*, I^*, R^*)$ โดยให้ $\det(J_1 - \lambda I_3) = 0$ เพื่อหาค่า λ เมื่อ λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen Values) และ I_3 คือเมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 3×3 ดังนี้

$$J_1 = \begin{bmatrix} M - HI^* - K & HN & 0 \\ HI^* & HN - Z - I^* & 0 \\ M & Z & -K \end{bmatrix}$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} M - HI^* - K & HN & 0 \\ HI^* & HN - Z - I^* & 0 \\ M & Z & -K \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$J_1 - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} M - HI^* - K - \lambda & HN & 0 \\ HI^* & HN - Z - I^* - \lambda & 0 \\ M & Z & -K - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det = (-K - \lambda)\begin{vmatrix} M - HI^* - K - \lambda & HN \\ HI^* & HN - Z - I^* - \lambda \end{vmatrix}$$

$$0 = \left(-K - \lambda\right)\left[\left[\left(M - HI^* - K - \lambda\right)\left(HN - Z - I^* - \lambda\right)\right] - \left[\left(HI^*\right)\left(HN\right)\right]\right]$$

$$0 = \left(-K - \lambda\right)\left[\left(M - HI^* - K\right)\left(HN - Z - I^*\right) - \lambda\left[HN - Z - I^*\right] + \left(M - HI^* - K\right)(-\lambda) + \lambda^2\right]$$

$$0 = \left(-K - \lambda\right)\left[\underbrace{\lambda^2 - \lambda\left(HN - Z - I^* + M - HI^* - K\right)}_{A} + \underbrace{\left(M - HI^* - K\right)\left(HN - Z - I^*\right)}_{B}\right]$$

$$0 = \lambda^2 A\lambda + B$$

โดยที่ $A = HN - Z - I^* + M - HI^* - K$

$$B = M - HI^* - K\left(HN - Z - I^*\right)$$

$$\lambda_2 = \frac{A + \sqrt{A^2 - 4B}}{2}$$

$$\lambda_3 = A - \frac{\sqrt{A^2 - 4B}}{2}$$

โดยที่ $A \pm \dfrac{\sqrt{A^2 - 4B}}{2} < 0$

1.2 การหาค่าระดับการติดเชื้อ (R_0)

การหาค่าระดับการติดเชื้อหาค่า Spectral Radius ของ FV^{-1} โดยใช้ Next Generation Method ซึ่งได้จากสมการ (1) – (3) จะได้เมตริกซ์ในรูป $\frac{dX}{dt} = F(x) - V(X)$ เพื่อหาค่า Spectral Radius FV^{-1} ซึ่ง $F(X)$ และ $V(X)$ ได้จากอนุพันธ์ย่อย (Partial Derivative) ดังนี้

$$X = \begin{bmatrix} S \\ I \\ R \end{bmatrix},\ F = \left[\frac{\partial F_i(E_0)}{\partial X_i}\right] \text{และ } V = \left[\frac{\partial F_i(E_0)}{\partial X_i}\right]$$

เมื่อ $F(X)$ คือเมตริกซ์ของผู้ป่วยที่เพิ่มขึ้น และ $V(X)$ คือ เมตริกซ์ของผู้ป่วยที่เปลี่ยนสถานะจากกลุ่มหนึ่งไปอีกกลุ่มหนึ่งโดยพิจารณาค่าระดับการติดเชื้อ R_0 ดังนี้

$$F(X) = \begin{bmatrix} 0 \\ HSI \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{และ} \qquad V(X) = \begin{bmatrix} -PN + MS + HSI + KS \\ ZI + KI \\ -ZI - MS - KR \end{bmatrix}$$

$$\text{หา } F(E) = \left[\frac{\partial F_i(E)}{\partial X_i}\right] \qquad \text{และ} \qquad V(E) = \left[\frac{\partial V_i(E)}{\partial X_i}\right]$$

$$\text{จะได้ } F(E) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ HI & HS & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V(E) = \begin{bmatrix} M + HT + K & HS & 0 \\ 0 & Z + K & 0 \\ -M & -Z & K \end{bmatrix}$$

ให้ $E_0(s, I, R) = (N, 0, 0)$

$$F(E_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & HN & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V(E_0) = \begin{bmatrix} M + K & HN & 0 \\ 0 & Z + K & 0 \\ -M & -Z & K \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{vmatrix} ZK + K^2 & 0 & M(Z + K) \\ HNK & MK + K^2 & MZ - KZ + (MH)(MN) \\ 0 & 0 & K^2 + MZ + MK + KZ \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} ZK + K^2 & 0 & M(Z+K) \\ -HNK & MK + K^2 & -MZ - KZ + (MH)(MN) \\ 0 & 0 & K^2 + MZ + MK + KZ \end{vmatrix}$$

หาค่า $\det V = M + K \begin{vmatrix} Z+K & 0 \\ -Z & K \end{vmatrix} = M + K(Z+K)K = M + K^2(Z+K)$

พิจารณา $\rho\left[FV^{-1}(E_0)\right]$

ดังนั้น $\rho\left[FV^{-1}(E_0)\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & HN & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M+K & HN & 0 \\ 0 & Z+K & 0 \\ -M & -Z & K \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & HN & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M+K & 0 & -M \\ HN & Z+K & -Z \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix} \bullet \frac{1}{M+K^2(Z+K)}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & HN(Z+K) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \frac{1}{M+K^2(Z+K)}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{HN(Z+K)}{M+K^2(Z+K)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho\left[FV^{-1}(E_0)\right] = \frac{HN}{M+K^2}$$

ดังนั้น คำนวณหาค่า Spectral Radius ของ $FV^{-1}(E_0)$ เขียนแทนด้วย

$\rho\left[FV^{-1}(E_0)\right] = \dfrac{HN}{M+K^2}$ จะได้ $R_0 = \dfrac{HN}{M+K^2}$

ดังนั้น จุกสมดุลที่มีโรคมีเสถียรภาพ เมื่อ $R_0 > 1$ โดย $R_0 = \dfrac{HN}{M+K^2}$

โดยพิจารณา ดังนี้

1. ค่า R_0 ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรคมีค่า $R_0 < 1$ จะไม่เกิดการแพร่ระบาด
2. ค่า R_0 ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรคมีค่า $R_0 > 1$ จะเกิดการแพร่ระบาด

ตอนที่ 2 ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขการศึกษาอัตราการฉีดวัคซีนในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการป้องกันโรคอีสุกอีใส กรณีศึกษาจังหวัดภูเก็ต

การวิจัยในครั้งนี้ผู้วิจัยได้ทำการวิเคราะห์เชิงตัวเลข โดยนำค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการสำรวจข้อมูลเกี่ยวกับการฉีดวัคซีนป้องกันของโรคอีสุกอีใส ซึ่งมีค่าต่าง ๆ ดังนี้

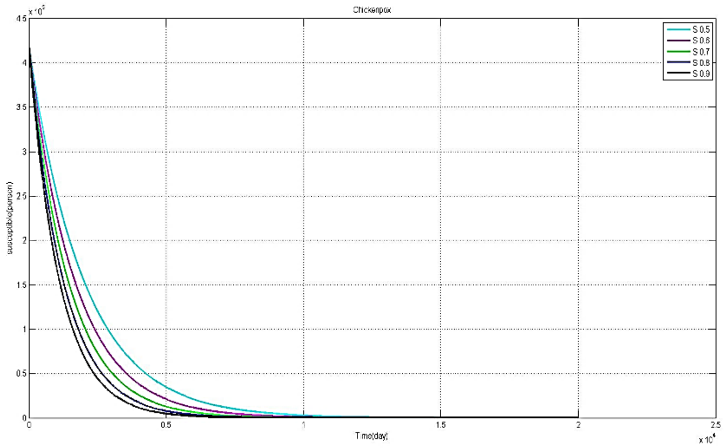
ตารางที่ 1 ค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการสำรวจข้อมูลเกี่ยวกับการฉีดวัคซีนป้องกันโรคอีสุกอีใส

ข้อความ	สัญลักษณ์	ค่าพารามิเตอร์	หน่วย
จำนวนประชากรมนุษย์ทั้งหมด*	N	418,785	คน
อัตราการเกิดใหม่ของประชากรมนุษย์	P	0.00003145	ต่อวัน
อัตราการตายโดยธรรมชาติ	K	0.00001694	ต่อวัน
อัตราการติดเชื้อ	H	0.00000144	ต่อวัน
อัตราการหาย	Z	0.07143	ต่อวัน
อัตราการฉีดวัคซีน	M	0.5-0.9	

*สำนักงานสาธารณะสุขจังหวัดภูเก็ต

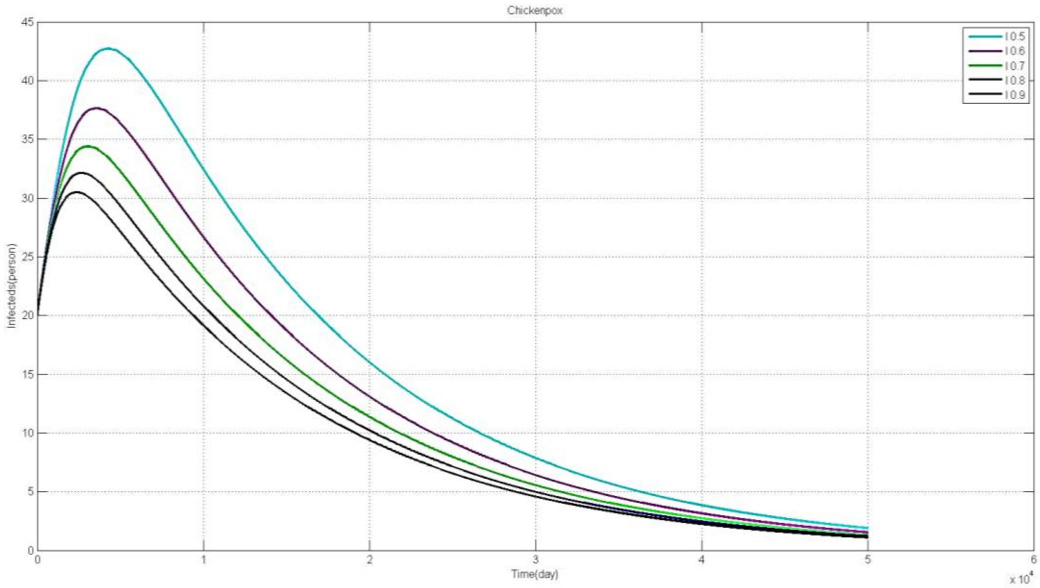
เมื่อพิจารณาเสถียรภาพของระบบ ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรค จะพบว่าค่าลักษณะเฉพาะทุกค่ามีส่วนจริงเป็นค่าลบ และสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz ส่งผลให้คำตอบจะลู่เข้าสู่ $E_0 = (N, 0, 0)$ ดังนั้นจุดสมดุลมีโรค E_0 จะเป็น Local Asymptotically (Fred Brauer, Pauline den Driessche and Jianhong Wu (Eds.), 2008)

เมื่อพิจารณาเสถียรภาพของระบบ ณ จุดสมดุลที่มีโรค จะพบว่าค่าลักษณะเฉพาะทุกค่ามีส่วนจริงเป็นค่าลบและสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz ส่งผลให้คำตอบจะลู่เข้าสู่ $E_1 = (S^*, I^*, R^*)$ ดังนั้นจุดสมดุลมีโรค E_1 จะเป็น Local Asymptotically



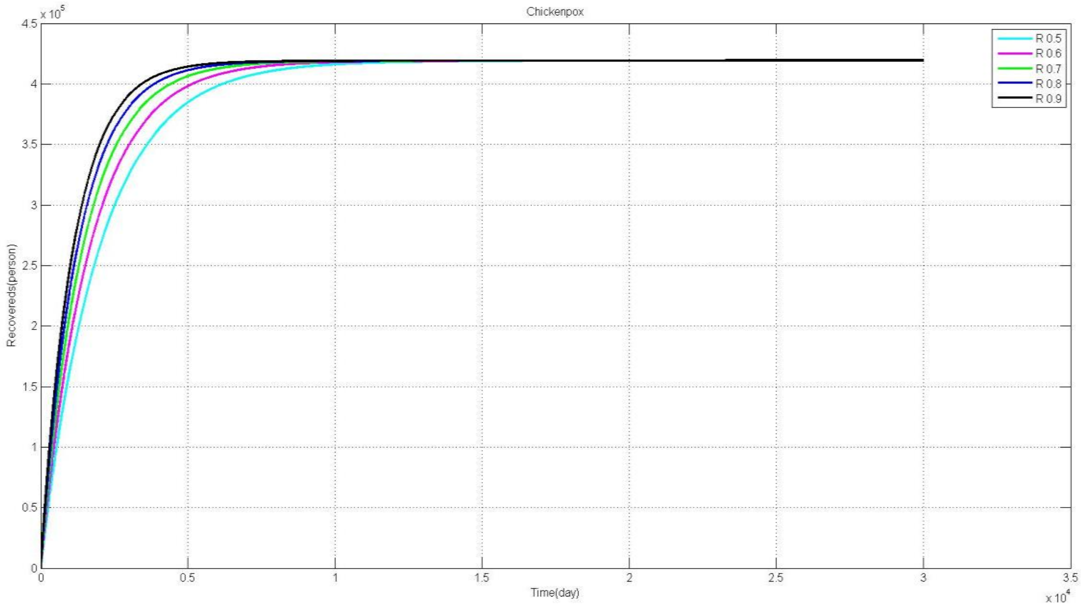
รูปที่ 2 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มเสี่ยง (S) ณ เวลา t ใด ๆ เมื่อค่า $(M) = 0.5 - 0.9$ ตามลำดับ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลมีเชื้อ

จากรูปที่ 2 เมื่อเพิ่มอัตราการฉีดวัคซีนป้องกันโรคอีสุกอีใส (M) ลงในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการป้องกันโรคให้มากขึ้นจะพบว่า อัตราเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มเสี่ยง (S) ณ เวลา t ใด ๆ จะค่อย ๆ ลดลงและเปลี่ยนแปลงอย่างช้า ๆ ซึ่งถ้ามีประชากรมีการฉีดวัคซีนป้องกันโรคอีสุกอีใสเป็นจำนวนมากขึ้น จะส่งผลให้จำนวนประชากรกลุ่มเสี่ยงลดลงอย่างช้า ๆ ซึ่งหมายถึง อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มเสี่ยงเปลี่ยนไปเป็นกลุ่มติดเชื้อจะใช้เวลานานขึ้น



รูปที่ 3 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มติดเชื้อ (I) ณ เวลา t ใด ๆ เมื่อค่า ตามลำดับ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลมีโรค

จากรูปที่ 3 เมื่อเพิ่มอัตราการฉีดวัคซีนสำหรับป้องกันโรคอีสุกอีใส (M) ลงในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับอัตราการฉีดวัคซีนสำหรับป้องกันโรคอีสุกอีใสให้มากขึ้นจะพบว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มเสี่ยงติดเชื้อ (I) ณ เวลา t ใด ๆ ลดลงอย่างเห็นได้ชัดซึ่งถ้าประชากรมีการฉีดวัคซีนสำหรับการป้องกันเป็นจำนวนมากขึ้นจะส่งผลให้จุดสูงสุดของกลุ่มติดเชื้อลดลงและการแพร่ระบาดของโรคจะลดลงด้วยเช่นกัน



รูปที่ 4 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรที่หายป่วยจากโรค ณ เวลา t ใด ๆ เมื่อค่าตามลำดับ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลมีโรค

จากรูปที่ 4 เมื่อเพิ่มอัตราการฉีดวัคซีนสำหรับการป้องกันโรคอีสุกอีใส ลงในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการฉีดวัคซีนสำหรับการป้องกันโรคอีสุกอีใส จะส่งผลให้จำนวนประชากรกลุ่มติดเชื้อเปลี่ยนไปเป็นกลุ่มที่หายป่วยจากโรครวดเร็วขึ้น เนื่องจากจำนวนคนติดเชื้อน้อยลงจึงส่งผลให้เกิดการแพร่ระบาดลดลง

สรุปและอภิปรายผล

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาการศึกษาอัตราการฉีดวัคซีนในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการป้องกันโรคอีสุกอีใส และวิเคราะห์เสถียรภาพของการการศึกษาอัตราการฉีดวัคซีนในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการป้องกันโรคอีสุกอีใส ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการวิจัยในครั้งนี้ คือ ระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น ซึ่งประกอบด้วย ประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ประชากรที่ติดเชื้อและสามารถแพร่เชื้อได้ และประชากรที่หายป่วยจากโรค ซึ่งผู้วิจัยเพิ่มค่าพารามิเตอร์ (M) คือ อัตราการฉีดวัคซีน ลงในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ใช้วิธีการวิเคราะห์วิธีมาตรฐาน และวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับตรวจสอบการแพร่ระบาดของโรค

ผู้วิจัยได้พิจารณาจุดสมดุลที่มีโรคและจุดสมดุลที่เกิดการแพร่ระบาดของโรค โดยการวิเคราะห์จุดสมดุลและเสถียรภาพของจุดสมดุลด้วยวิธีการวิเคราะห์วิธีมาตรฐาน ซึ่งค่าเสถียรภาพของระบบ Local Asymptotical Stable ที่ได้ต้องเป็นไปตามเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz เพื่อให้สามารถหาค่าพารามิเตอร์ R_0 ซึ่งมีความจำเป็นภายใต้เงื่อนไขเพื่อให้ Local Asymptotically Stability of Equilibrium State ที่มี

เสถียรภาพในส่วนของจุดสมดุลที่ไม่มีโรคและจุดสมดุลที่มีการแพร่ระบาดของโรคโดยที่ $R_0 = \frac{HN}{M+K^2}$ สามารถพิจารณาค่าระดับการติดเชื้อ (R_0) โดยค่า $R_0 < 1$ วิเคราะห์ได้ว่า ณ จุดสมดุลจะไม่มีโรคจึงไม่เกิดการแพร่ระบาดโรคของโรค และค่า $R_0 > 1$ วิเคราะห์ได้ว่า ณ จุดสมดุลมีการติดเชื้อจึงเกิดการแพร่ระบาดของโรค จากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขพบว่าจุดสมดุลทั้งสองเป็น Local Asymptotical Stable

จากการวิจัยพบว่าประสิทธิภาพอัตราการฉีดวัคซีนป้องกันเป็นผลปัจจัยหนึ่งที่ส่งผลต่อการเปลี่ยนแปลงของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ SIR สำหรับการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคอีสุกอีใส โดยพบว่าถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้ออีสุกอีใสมีการฉีดวัคซีนป้องกันน้อย จะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคเพิ่มขึ้น และถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้ออีสุกอีใสมีการฉีดวัคซีนป้องกันจำนวนมากขึ้นจะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคลดลงจนกระทั่งไม่มีการแพร่ระบาดของเชื้ออีสุกอีใส

ดังนั้นสามารถนำผลจากการวิจัยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ SIR สำหรับการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคอีสุกอีใสโดยการฉีดวัคซีนป้องกันในการป้องกันโรคเพื่อลดจำนวนผู้ป่วยและใช้เป็นข้อมูลทางวิชาการให้กับหน่วยงานที่เฝ้าระวังของสำนักระบาดวิทยา กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณะสุข รวมทั้งนำเสนอข้อมูลต่อหน่วยงานด้านสาธารณสุขดำเนินการมาตรการควบคุมและป้องกันโรคอีสุกอีใสโดยการฉีดวัคซีนป้องกันให้กับประชนทั่วไปที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ

เอกสารอ้างอิง

ธีรวัฒน์ นาคะบุตร. (2546). *ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์.* นครปฐม: สถาบันราชภัฏนครปฐม

สุกัลยา ศรีสุริฉัน. (2559). *การสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์.* [Online]. http://elearn ing.nsru.ac.th/web_elearning/math_model/introduction.html, (13 August 2016)

สำนักระบาดวิทยา. (2559). *โรคอีสุกอีใส* (Chickenpox). [Online]. http://www.boe. moph.go.th/boedb/surdata/disease.php?ds=15, (15 มกราคม 2558)

อนุวัตร จิรวัฒนาพาณิชและคณะ. (2562). *ตัวแบบชิงคณิตศาสตร์สำหรับการรณรงค์การป้องกันการแพร่ระบาดของโรคตาแดง* (รายงานการวิจัย). ภูเก็ต : มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต

อภิชาต ศิวยาธร. (2550). *โรคผิวหนังต้องรู้สำหรับเวชปฏิบัติทั่วไป.* (พิมพ์ครั้งที่8). สำนักพิมพ์หมอชาวบ้าน: กรุงเทพฯ.

อรวรรณ ตันสุยและพันธนี พงศ์สัมพันธ์. (2556). *แบบจำลองการระบาดของโรคอีสุกอีใสในประเทศไทย.* วารสารวิทยาศาสตร์ลาดกระบัง, 22(1) : 39-52.

Anderson, R.M., and May, R.M.. (1991). *Infectious diseases of humans: dynamics and control.* Oxford : Oxford University Press.

Biophysics Group. (2009). *Mathermatics Model of Transmission.* Faculty of science, MahidolUniversity.

Fred Brauer, Pauline den Driessche and Jianhong Wu. (2008). *Mathematical Epidemilogy.* 2563, จาก http://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-540-789911-6

Kermack and McKendrick. (1927). *A contribution to the mathematical theory of epidemics.* 2563, จาก https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspa.1927.0118