ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไข้ไทฟอยด์ โดยการรณรงค์ให้ความรู้ ในจังหวัดภูเก็ต

Mathematical Model for Controlling the Spread of Typhoid fever Disease on Education Campaign in Phuket

เสาวลักษณ์ คุ้มครอง[1] เจษฎา สุจริตธุรการ[2]

[1]นักศึกษาปริญญามหาบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต

rakmobile@gmail.com

[2]อาจารย์ประจำคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต

toy.jedsada@gmail .com

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาและวิเคราะห์เสถียรภาพของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไข้ไทฟอยด์ โดยการรณรงค์ให้ความรู้ในจังหวัดภูเก็ต วิเคราะห์ตัวแบบโดยใช้วิธีมาตรฐาน ศึกษาจุดสมดุล ศึกษาเสถียรภาพของจุดสมดุลหาคำตอบเชิงวิเคราะห์ ศึกษาประสิทธิภาพการรณรงค์ให้ความรู้การแพร่ระบาดของโรคไข้ไทฟอยด์ ในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์และหาคำตอบเชิงตัวเลข

ผลการวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์พบว่า ประสิทธิการรณรงค์ให้ความรู้การแพร่ระบาดของโรคไข้ไทฟอยด์ เป็นปัจจัยที่ส่งผลต่อค่าระดับการติดเชื้อของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งศึกษาประสิทธิการรณรงค์ให้ความรู้ มีค่ามากส่งผลให้ค่าระดับการติดเชื้อลดลง และยังพบว่าถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ มีความรู้เกี่ยวกับการแพร่ระบาดของโรคไข้ไทฟอยด์น้อย จะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคเพิ่มขึ้นและถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ มีความรู้เกี่ยวกับการแพร่ระบาดของโรคไข้ไทฟอยด์ เป็นจำนวนมากขึ้นจะส่งผลให้การแพร่ระบาดการติดเชื้อของโรคลดลง จนกระทั่งไม่มีการแพร่ระบาดของโรค

คำสำคัญ : ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์, การรณรงค์ให้ความรู้, โรคไข้ไทฟอยด์

Abstract

The purpose of this research is to develop and analyze the stability of mathematical models for controlling the spread of Typhoid fever Disease by educating in phuket Analyze the model using standard methods Study balance Study the stability of the balance point Find analytical answers Study the effectiveness of the campaign to educate in a mathematical model and find numerical answers.

The results of the mathematical modeling analysis showed that the rate of education campaigning for typhoid fever spread was a factor affecting the baseline population in mathematical modeling. That the rate of awareness campaigning was a factor affecting mathematics Modeling If the population's risk of infection is studied and hypothesized is increased, the spread of typhoid fever is reduced until no epidemic.

Keywords : Mathematical Model, Education Campaign, Typhoid fever Disease

1. บทนำ

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญในการดำเนินชีวิต สามารถนำมาประยุกต์ได้หลายสาขา โดยเฉพาะทางการแพทย์สามารถประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์เพื่อ จำลองการเกิดโรคต่างๆ รวมทั้งเป็นเครื่องมือช่วยทำความเข้าใจเกี่ยวสุขภาพหลายๆ ด้าน อาทิ สภาพแวดล้อมที่ทำให้เกิดโรคต่างๆ การป้องกันโรค การทดสอบปริมาณยา เป็นต้น ปัจจุบันการเปลี่ยนแปลงของสภาพภูมิอากาศ สิ่งแวดล้อมเป็นเหตุให้เกิดโรคติดต่อได้ง่ายมีการแพร่ระบาดอย่างรวดเร็ว ส่งผลต่อสุขภาพทำให้มนุษย์เสียชีวิตได้ง่าย ดังนั้นจำเป็นต้องอาศัยเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ทั้งวิทยาศาสตร์มาประยุกต์ใช้แก้ปัญหาช่วยให้มนุษย์มีคุณภาพชีวิตที่ขึ้น(แคทลียา ดวงเกตุ. (2556))

จากการศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์แสดงให้เห็นถึงบทบาทและประโยชน์ของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่มีส่วนช่วยในการแก้วิกฤตการณ์ที่กำลังเกิดขึ้นจากโรคภัยต่างๆ โดยจะจำลองประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ตัวเชื้อโรค ตัวพาหะนำโรค และผู้ติดเชื้อ โดยแปลงข้อมูลให้อยู่ในรูปสมการทางคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายลักษณะการระบาดและการดำเนินของโรคโดยที่ผู้วิจัยไม่จำเป็นต้องไปศึกษากับมนุษย์โดยตรงซึ่งอาจเกิดอันตรายต่อชีวิตของผู้วิจัยและผู้ป่วยได้ อีกทั้งยังช่วยลดงบประมาณสำหรับการหามาตรการการป้องกันและการรักษาโรคตามความต้องการที่แท้จริงได้อย่างรวดเร็วและเหมาะสมมากที่สุด

โรคไทฟอยด์ เป็นโรคติดต่อที่เกิดจากเชื้อแบคทีเรีย ผู้ป่วยจะมีอาการไข้และปวดท้องเป็นหลัก ซึ่งเชื้อ 2 ชนิดนี้พบเฉพาะในคน การติดต่อจึงเกิดจากคนสู่คนเท่านั้น จะมีอาการของโรคคือ มีไข้ต่ำๆ แล้วค่อยสูงเพิ่มขึ้น อาจจะปวดศีรษะ ไอแห้งๆ เบื่ออาหาร อ่อนเพลีย ขึ้นผื่น เป็นต้น และจะมีระยะฟักตัว 3-21วัน ระยะเวลาที่สั้นหรือขึ้นอยู่กับปริมาณเชื้อที่ได้รับเข้าสู่ร่างกาย(กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุข.(2562))

การป้องกันที่ดีคือคนที่เป็นโรคไทฟอยด์ ล้างมือบ่อย ๆ ด้วยสบู่และน้ำล้างก่อนการรับประทานอาหารหรือการเตรียมอาหารและหลังจากเข้าห้องน้ำหลีกเลี่ยงการดื่มน้ำที่อาจมีการปนเปื้อนหรือไม่ปลอดภัย เลือกรับประทานอาหารที่ผ่านการปรุงสุกแล้วเท่านั้น ป้องกันไม่ให้แพร่เชื้อสู่ผู้อื่น จากเหตุข้างต้นผู้วิจัยได้ตระหนักและเห็นประโยชน์ที่ได้รับจึงดำเนินการวิจัย เรื่องตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ SEIR สำหรับการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไข้ไทฟอยด์ โดยการรณรงค์ให้ความรู้ ซึ่งผู้วิจัยได้เพิ่มค่าพารามิเตอร์ของประสิทธิภาพการรณรงค์ให้ความรู้เป็นปัจจัยสำหรับการศึกษาในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ เพื่อสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับป้องกันและควบคุมโรคไข้ไทฟอยด์ที่มีประสิทธิภาพสูงขึ้น(บัณฑิตย์ อันยงค์. (2558))

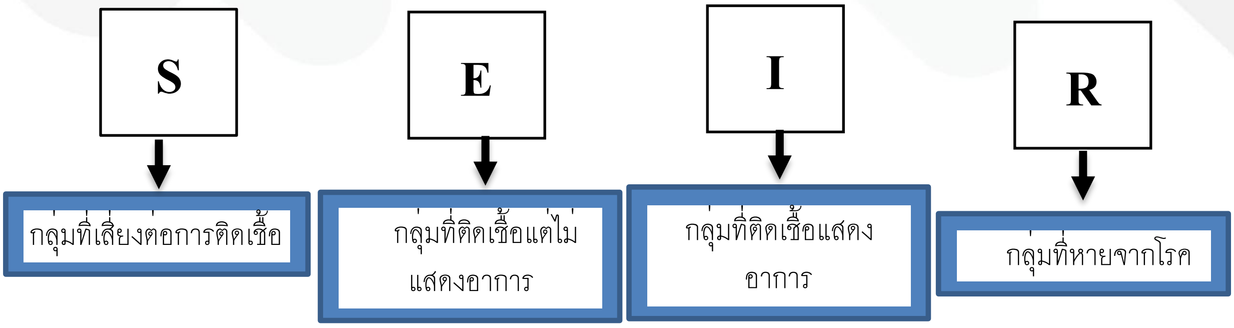
2.วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคไทฟอยด์ โดยการรณรงค์ให้ความรู้
2. เพื่อวิเคราะห์เสถียรภาพของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคไทฟอยด์ โดยการรณรงค์ให้ความรู้

3.วิธีการดำเนินการวิจัย

การดำเนินการวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดโรคไข้ไทฟอยด์ โดยการรณรงค์ให้ความรู้ ซึ่งมีวิธีดำเนินการวิจัย 3 ขั้นตอน (Jantrapron Sukawat and Surapol Naowarat, 2014) ดังนี้

1. การพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยได้ศึกษาแผนภาพแสดง ความสัมพันธ์ขององค์ประกอบในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (Biophysics Group, 2009) ดังนี้



2. การตรวจสอบตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ การตรวจสอบตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคไทฟอยด์ จัดทำเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของตัวแบบฉะนั้นจำเป็นต้องดำเนินการโดยผู้เชี่ยวชาญที่เกี่ยวข้องกับศาสตร์นี้โดยตรงในงานวิจัยนี้จำเป็นต้องส่งตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดให้ผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบดังนี้ 1) นักระบาดวิทยา 2) นักคณิตศาสตร์

3. การวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ การวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่กล่าวต่อไปนี้เป็นการวิเคราะห์ตามแบบมาตรฐาน (standard method) โดยศึกษาจุดสมดุลและศึกษาเสถียรภาพของจุดสมดุลเพื่อหาเงื่อนไขของพารามิเตอร์ที่เหมาะสมของจุดสมดุลนั้น โดยวิธีเชิงวิเคราะห์และหาคำตอบเชิงตัวเลขของตัวแบบ

3.1 วิเคราะห์ตามแบบมาตรฐาน การศึกษาหาค่าจุดสมดุลและค่าเสถียรภาพของระบบ ได้ดังนี้

3.1.1 จุดสมดุล (Equilibrium point) ในการหาจุดสมดุลโดยใช้วิธีการคำนวณซึ่งทำ ได้โดยจัดสมการเชิงอนุพันธ์ที่ได้จากการแปลงสมการของตัวแบบใหม่ ให้เท่ากับ ศูนย์ ซึ่ง

$$\frac{dS}{dt}=N,\frac{dE}{dt}=0,\frac{dI}{dt}=0,\frac{dR}{dt}=0$$

3.1.2 การหาค่าระดับการติดเชื้อ (Basic Reproductive Number: R_0) ค่าระดับการติดเชื้อเป็นค่าเฉลี่ยที่ผู้ป่วยหนึ่งคนจะสามารถทำให้ คนกลุ่มเสี่ยงป่วยเป็นจำนวนกี่คนในช่วงของเวลาที่เขายังป่วยอยู่ โดยใช้วิธีการ Next Generation Method โดยจัดสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นในรูป $\frac{dX}{dt}=F(X)-V(X)$ เพื่อหาค่า R_0 จากเมตริกซ์ $\rho(FV^{-1})$ ซึ่ง $F(X)$ คือเมตริกซ์ของผู้ป่วยที่เพิ่มขึ้น, $V(X)$ คือเมตริกซ์ของผู้ป่วยที่เปลี่ยนสถานะจากกลุ่มหนึ่งไปอีกกลุ่มหนึ่งได้จากอนุพันธ์ย่อย (Partial Derivative) ดังนี้

$$X = \begin{bmatrix} S \\ E \\ I \\ R \end{bmatrix}, F\left[\frac{\partial F_i(E_0)}{\partial X_i}\right] \text{ และ } V\left[\frac{\partial V_i(E_0)}{\partial X_i}\right]$$ โดยพิจารณาค่า R_0 ดังนี้

1. ถ้า $R_0 > 1$ แสดงว่า โรคมีการระบาดเพิ่มขึ้น (Epidemic)
2. ถ้า $R_0 = 1$ แสดงว่า โรคเริ่มเสถียร (Endemic)
3. ถ้า $R_0 < 1$ แสดงว่า โรคไม่มีการระบาด

3.1.3 เสถียรภาพ (stability) โดยการหาค่าลักษณะเฉพาะซึ่งสามารถหาได้จากสมการลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมทริกซ์ $\det(J - \lambda I) = 0$ โดยใช้วิธีการคำนวณเพื่ออธิบายคำตอบของสมการเกี่ยวกับค่าความสมดุล เพื่อตรวจสอบว่าเป็น Local asymptotically stable

จากการตรวจสอบเงื่อนไข จะได้สมการลักษณะเฉพาะ เนื่องจากต้องการตรวจสอบเสถียรภาพของระบบโดยดูจาก ค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมทริกซ์ต้องเป็นลบและสอดคล้อง กับเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz ซึ่งสามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณี ดังนี้

3.1.3.1 Local asymptotically stable ของจุดสมดุลไม่มีโรค โดยการตรวจสอบว่าค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมทริกซ์ ณ สภาวะที่ไม่มีโรค (E_0) ซึ่งจะได้สมการลักษณะเฉพาะ และได้ค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมทริกซ์สอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz โดย ลักษณะเฉพาะทุกค่าต้องเป็นลบจึงจะสอดคล้องตามเงื่อนไข $R_0 < 1$ ซึ่งสามารถคำนวณได้จากโปรแกรมสำเร็จรูป Mathematica

3.1.3.2 Local asymptotically stable ของจุดสมดุลที่มีโรค โดยการตรวจสอบ ว่าค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมทริกซ์ ณ สภาวะที่มีการระบาดของโรค (E_1) จะได้สมการลักษณะเฉพาะจาก $\det(J - \lambda I) = 0$ ซึ่งค่าสัมประสิทธิ์ของสมการลักษณะเฉพาะเป็นลบซึ่งสอดคล้องตามเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz สำหรับค่าที่ได้ตามเกณฑ์ $R_0 > 1$ ซึ่งสามารถคำนวณได้จากโปรแกรมสำเร็จรูป Mathematica

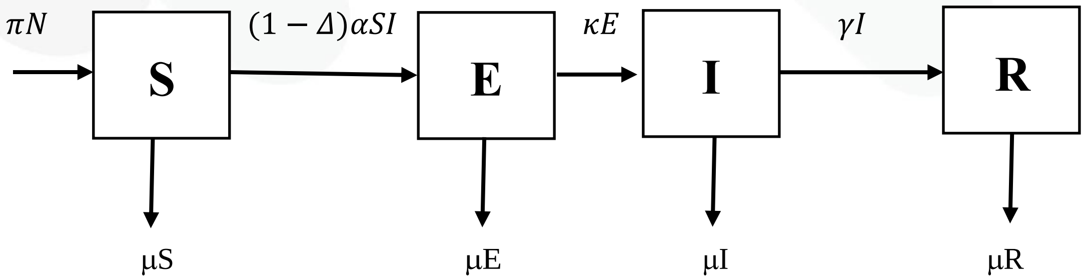
3.2 การวิเคราะห์เชิงตัวเลข

3.2.1 โดยหาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมที่ทำให้จุดสมดุลไม่มีโรค (Disease Free Equilibrium) และจุดสมดุลที่เกิดจากการระบาดของโรค (Disease Endemic Equilibrium) ทำให้ระบบเป็น Local asymptotically stable ซึ่งเป็นการหาค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมทริกซ์ ต้องมีค่าลักษณะเฉพาะทุกค่ามีส่วนจริงเป็นลบซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz

3.2.2 ใช้โปรแกรม Matlab เพื่อหาค่าพารามิเตอร์มาหาคำตอบเชิงตัวเลขของระบบสมการเชิงอนุพันธ์

4.การสร้างตัวแบบและการวิเคราะห์ตัวแบบ การสร้างและวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐานจากการวิจัยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ SEIR สำหรับการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไข้ไทฟอยด์โดยการรณรงค์ให้

ความรู้ สามารถสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์โดยผู้วิจัยสนใจศึกษาประสิทธิภาพการรณรงค์ให้ ความรู้ (Δ) ดังภาพ 2 ดังนี้



ความสัมพันธ์และองค์ประกอบของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไทฟอยด์ โดยการรณรงค์ให้ความรู้

การศึกษาในครั้งนี้ได้กำหนดให้จำนวนประชากรคงที่ ซึ่งจากภาพได้ระบบสมการอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น(Kermack and Mckendrick, 1927) ดังนี้

$$\frac{dS}{dt} = \pi N - (1-\Delta)\alpha SI - \mu S \qquad (1)$$

$$\frac{dE}{dt} = (1-\Delta)\alpha SI - \kappa E - \mu E \qquad (2)$$

$$\frac{dI}{dt} = \kappa E - \gamma I - \mu I \qquad (3)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R \qquad (4)$$

โดยที่ $N = S + E + I + R$ จากสมการ (1) - (4) ผู้วิจัยดำเนินการวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ได้ผลดังนี้

4.1 การหาจุดสมดุล (Equilibrium Point) เนื่องจาก

$$\frac{dN}{dt} = F(X), F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}, x = (S, E, I, R)^t$$ ดังนั้น เมื่อกำหนดประชากรทั้งหมดเป็นค่าคงที่

นั่นคือ

เมื่อกำหนดให้ $\frac{dS}{dt}=0, \frac{dE}{dt}=0, \frac{dI}{dt}=0, \frac{dR}{dt}=0$ ได้ดังนี้

$$0=\pi N-(1-\Delta)\alpha SI-\mu S \tag{5}$$

$$0=(1-\Delta)\alpha SI-\kappa E-\mu E \tag{6}$$

$$0=\kappa E-\gamma I-\mu I \tag{7}$$

$$0=\gamma I-\mu R \tag{8}$$

จากสมการ (5) - (8) ดำเนินการจัดรูปสมการใหม่เพื่อหาค่าของ S^*, E^*, I^*, R^* จะได้

$$S^*=\frac{\pi N}{(1-\Delta)\alpha I+\mu} \tag{9}$$

$$E^*=\frac{\pi}{(\kappa+\mu)}-\frac{\mu(\gamma+\mu)}{(\kappa+\mu)\left(1-\Delta\right)\alpha N\kappa} \tag{10}$$

$$I^*=\frac{\kappa\pi}{(\gamma+\mu)(\kappa+\mu)}-\frac{\mu}{(\kappa+\mu)(1-\Delta)\alpha N\kappa} \tag{11}$$

$$R^*=\frac{\gamma I}{\mu} \tag{12}$$

เสถียรภาพของจุดสมดุลสามารถพิจารณาจากค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมตริกซ์ จากสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น (5) - (7) สามารถแปลงเป็นจาโคเบียน เมตริกซ์ ได้ดังนี้

$$J=\begin{bmatrix} -\left(1-\Delta\right)\alpha I-\mu & 0 & -\left(1-\Delta\right)\alpha S & 0 \\ \left(1-\Delta\right)\alpha I & -\kappa-\mu & \left(1-\Delta\right)\alpha S & 0 \\ 0 & \kappa & -\gamma-\mu & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}$$

และพิจารณาค่าลักษณะเฉพาะได้จาก $\det\left(J-\lambda I_4\right)=0$ เมื่อ I_4 คือเมตริกซ์เอกลักษณ์ ขนาด 4×4

4.1.1 การหาจุดสมดุลไม่มีโรค (Disease Free Equilibrium Point) กำหนดให้ $E=0$ ในสมการที่ (5)-(7) จะได้ $I=0$ และ $I=0$ แทนในสมการจะได้ $S=1$ ดังนั้น $E_0:(S,E,I,R)=E_0(1,0,0,0)$ เสถียรของระบบ *(Stability of Systems)* ที่ จุด E_0 โดยดำเนินการหาสมการลักษณะเฉพาะ $\det(J-\lambda I_4)=0$ เพื่อหาค่า λ เมื่อ λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen Values) และ I เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 4×4 ดังนี้

$$J_0=\begin{bmatrix}-\mu & 0 & -(1-\Delta)\alpha S & 0\\ 0 & -\kappa-\mu & (1-\Delta)\alpha S & 0\\ 0 & \kappa & -\gamma-\mu & 0\\ 0 & 0 & \gamma & -\mu\end{bmatrix}$$

$$J_0-\lambda I=\begin{bmatrix}-\mu-\lambda & 0 & -(1-\Delta)\alpha S & 0\\ 0 & -\kappa-\mu-\lambda & (1-\Delta)\alpha S & 0\\ 0 & \kappa & -\gamma-\mu-\lambda & 0\\ 0 & 0 & \gamma & -\mu-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\det(J_0-\lambda I)=(-\mu-\lambda)\begin{bmatrix}-\mu-\lambda & 0 & -(1-\Delta)\alpha S\\ 0 & -\kappa-\mu-\lambda & (1-\Delta)\alpha S\\ 0 & \kappa & -\gamma-\mu-\lambda\end{bmatrix}$$

$$=(-\mu-\lambda)\left[(-\mu-\lambda)(-\kappa-\mu-\lambda)(-\gamma-\mu-\lambda)\right]$$

จะได้ $=(-\mu-\lambda)\left[(-\mu-\lambda)(-(\kappa+\mu)\lambda(-(\gamma+\mu)\lambda\right]$

ดังนั้น $\lambda_1=-\mu,\lambda_2=-\mu,\lambda_3=-(\kappa+\mu)$ และ $\lambda_4=-(\gamma+\mu)$

โดย $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ และ λ_4 จะมีค่าเป็นลบ เมื่อพิจารณาความเสถียรภาพของระบบ ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรค จะพบว่าค่าลักณะเฉพาะ $\lambda_1=-0.0000481479,\lambda_2=-0.0000481479,\lambda_3=-0.000077798$ และ $\lambda_4=-0.00007778$ ซึ่งทุกค่ามีส่วนจริงเป็นค่าลบและสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Roth-Hurwitz ส่งผลให้คำตอบจะลู่เข้าสู่จุดสมดุล $E_0=(416582,0,0,0)$ ดังนั้น จุดสมดุลไม่มีโรค E_0 จะเป็น Local asymptotically

4.1.2 การหาจุดสมดุลที่มีโรค (Disease Endemic Equilibrium Point) กำหนด $\overline{E}\neq 0$ และ $\overline{E}>0$ พิจารณา $E_1(\overline{S},\overline{E},\overline{I},\overline{R})$ ดังนั้น สมการลักษณะเฉพาะที่จุด $E_1(\overline{S},\overline{E},\overline{I},\overline{R})$ โดยให้

$\det\left(J_1-\lambda I\right)=0$ เพื่อหาค่า λ เมื่อ λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen Values) และ I เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 4×4 ดังนี้

$$J_1=\begin{bmatrix} -(1-\Delta)\alpha I-\mu & 0 & -(1-\Delta)\alpha S & 0 \\ (1-\Delta)\alpha I & -\kappa-\mu & (1-\Delta)\alpha S & 0 \\ 0 & \kappa & -\gamma-\mu & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}$$

$$J_1-\lambda I_4=\begin{bmatrix} -(1-\Delta)\alpha I^*-\mu-\lambda & 0 & -(1-\Delta)\alpha S^* & 0 \\ (1-\Delta)\alpha I^* & -\kappa-\mu-\lambda & (1-\Delta)\alpha S^* & 0 \\ 0 & \kappa & -\gamma-\mu-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(J_1-\lambda I_3)=(-\mu-\lambda)\begin{bmatrix} -(1-\Delta)\alpha I^*-\mu-\lambda & 0 & -(1-\Delta)\alpha S^* \\ (1-\Delta)\alpha I^* & -\kappa-\mu-\lambda & (1-\Delta)\alpha S^* \\ 0 & \kappa & -\gamma-\mu-\lambda \end{bmatrix}$$

$$=(-\mu-\lambda)\begin{bmatrix} \left(\left(-(1-\Delta)\alpha I^*-\mu-\lambda\right)\left(-\kappa-\mu-\lambda\right)\left(-\gamma-\mu-\lambda\right)+\left(-(1-\Delta)\alpha S^*\right)\left((1-\Delta)\alpha I^*\right)\mu \\ -\left(-(1-\Delta)\alpha I^*-\mu-\lambda\right)\left((1-\Delta)\alpha S^*\kappa\right) \end{bmatrix}$$

$$=(-\mu-\lambda)\begin{bmatrix} \left(\left(-(1-\Delta)\alpha I^*-\mu-\lambda\right)\left(-\kappa-\mu-\lambda\right)\left(-\gamma-\mu-\lambda\right) \\ -(1-\Delta)\alpha^2 S^* I^*+\left((1-\Delta)\alpha I^*-\mu-\lambda\right)\left((1-\Delta)\alpha S^*\kappa\right) \end{bmatrix}$$

$$=(-\mu-\lambda)\left(\left(\left(-(1-\Delta)\alpha I^*-\mu-\lambda\right)\left(-\kappa-\mu-\lambda\right)\left(-\gamma-\mu-\lambda\right)+(1-\Delta)\alpha S^*\kappa\left(\gamma+\mu+\lambda\right)\right)\right)$$

การหาค่าลักษณะเฉพาะ โดยกำหนด $\det\left(J_1-\lambda I\right)=0$ ดังนี้

$$0=(-\mu-\lambda)\left(\left(\left(-(1-\Delta)\alpha I^*-\mu-\lambda\right)\left(-\kappa-\mu-\lambda\right)\left(-\gamma-\mu-\lambda\right)+(1-\Delta)\alpha S^*\kappa\left(\gamma+\mu+\lambda\right)\right)\right)$$

จะได้ค่าลักษณะเฉพาะในรูป $(-\lambda),(-\lambda),(-\lambda),\left(\dfrac{\kappa(1-\Delta)\alpha\pi N}{\mu(\kappa+\mu)(\gamma+\mu)}-\lambda\right)$

***4.2 การหาค่าระดับการติดเชื้อ** (Basic Reproductive Number : R_0)* การหาค่าระดับการติดเชื้อหาค่ารัศมีที่โดดเด่น (Spectral Radius) ของ Fv^{-1} โดยใช้วิธีการ Next Generation Method ซึ่งได้

จากสมการ (1) - (4) จะได้ เมตริกซ์ ในรูป $\frac{\partial X}{\partial t} = F(X) - V(X)$ เพื่อหาค่ารัศมีที่โดดเด่นจากเมตริกซ์ Fv^{-1} ซึ่ง $F(X)$ และ $V(X)$ ได้จากอนุพันธ์ย่อย (Partial Derivative) ดังนี้

$$X = \begin{bmatrix} S \\ E \\ I \\ R \end{bmatrix}, F\left[\frac{\partial F_i(E_0)}{\partial X_i}\right] \text{ และ } V\left[\frac{\partial V_i(E_0)}{\partial X_i}\right]$$

เมื่อ $F(X)$ คือเมตริกซ์ของผู้ป่วยที่เพิ่มขึ้น, $V(X)$ คือเมตริกซ์ของผู้ป่วยที่เปลี่ยนสถานะ จากกลุ่มหนึ่งไปอีกกลุ่มหนึ่งโดยพิจารณาค่าระดับการติดเชื้อ R_0 ดังนี้

$$F(X) = \begin{bmatrix} 0 \\ (1-\Delta)\alpha SI \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad V(X) = \begin{bmatrix} -\pi N + (1-\Delta)\alpha SI + \mu S \\ \kappa E + \mu E \\ -\kappa E + \gamma I + \mu I \\ -\gamma I + \mu R \end{bmatrix}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1-\Delta)\alpha I & 0 & (1-\Delta)\alpha S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F(E_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\Delta)\alpha N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V(E_0) = \begin{bmatrix} \mu & 0 & (1-\Delta)\alpha S & 0 \\ 0 & \kappa+\mu & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa & \gamma+\mu & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma & \mu \end{bmatrix}$$

$$FV^{-1}(E_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1-\Delta)\alpha S\kappa}{(\kappa+\mu)(\gamma+\mu)} & \frac{(1-\Delta)\alpha S}{(\gamma+\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ คำนวณหาค่า Spectral Radius

ของ $FV^{-1}(E_0)$ เขียนแทนด้วย $\rho[FV^{-1}(E_0)] = \frac{\kappa(1-\Delta)\alpha\pi N}{\mu(\kappa+\mu)(\gamma+\mu)}$

ดังนั้น จุดสมดุลภายใต้สภาวะการระบาดมีเสถียรภาพเมื่อ $R_0 > 1$ โดย $R_0 = \dfrac{\kappa(1-\Delta)\alpha\pi N}{\mu(\kappa+\mu)(\gamma+\mu)}$ โดยพิจารณา ดังนี้ 1) ค่า R_0 ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรคมีค่า $R_0 < 1$ จะไม่เกิดการแพร่ ระบาด และ 2) ค่า R_0 ณ จุดสมดุลที่มีโรคมีค่า $R_0 > 1$ จะเกิดการแพร่ระบาด (Kermack and McKendrick, 1927)

4.3 การวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Numerical analysis) การวิจัยในครั้งนี้ผู้วิจัยได้ทำการวิเคราะห์เชิงตัวเลขโดยการ นำค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการสำรวจข้อมูลเกี่ยวกับการแพร่ระบาดของโรคไข้ไทฟอยด์ ซึ่งมีค่าตามตารางดังนี้

ตาราง 1 ค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการสำรวจข้อมูลเกี่ยวกับการแพร่ระบาดของโรคไข้ไทฟอยด์

ข้อความ	**สัญลักษณ์**	**ค่าพารามิเตอร์**	**หน่วย**
จำนวนประชากรทั้งหมด	N	416,582	คน
อัตราการเกิดของประชากร	π	4.81479 X 10^{-5}	ต่อวัน
อัตราการตายโดยธรรมชาติ	μ	1.77044 X 10^{-5}	ต่อวัน
อัตราการสัมผัสเชื้อ	α	6.57668 X 10^{-7}	ต่อวัน
อัตราการฟักตัวของเชื้อ	κ	9.39526 X 10^{-8}	ต่อวัน
อัตราการมีภูมิคุ้มกัน	γ	9.39526 X 10^{-8}	ต่อวัน
อัตราการรณรงค์ให้ความรู้	Δ	0-1	

*สำนักระบาดวิทยากรมควบคุมโรคกระทรวงสาธารณสุข, (2562)

ผู้วิจัยได้ศึกษาประสิทธิภาพการรณรงค์ให้ความรู้แล้วหาค่าระดับการติดเชื้อ (Basic Reproductive Number : R_0) พบความสัมพันธ์ระหว่างค่าพารามิเตอร์ของ ประสิทธิภาพการรณรงค์ให้ความรู้กับค่าระดับการติดเชื้อได้ดังตาราง 2 ดังนี้

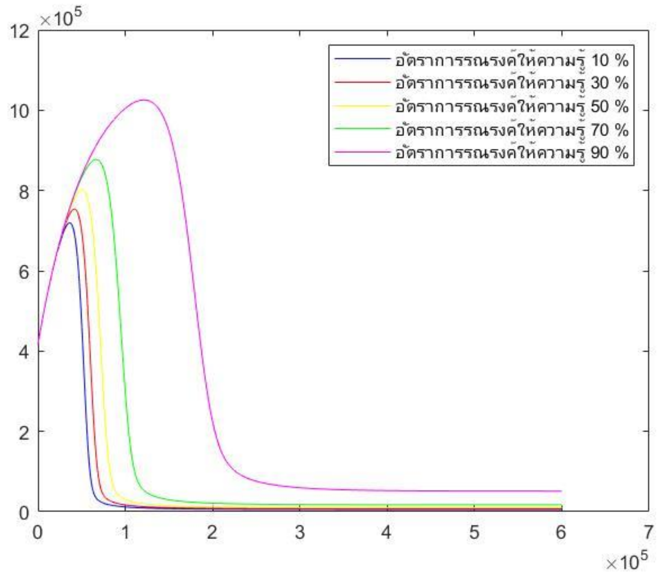
ประสิทธิภาพการรณรงค์ ให้ความรู้ (Δ)	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
ค่าระดับการติดเชื้อ (R_0)	81.2 55	73.1 30	65 4	56.8 79	48.7 53	40.6 27	32.5 2	24.3 76	16.2 51	0.8 12	0

จากตาราง 2 พบว่าค่าระดับการติดเชื้อ(R_0) มีค่า $R_0 < 1$ เมื่อประสิทธิภาพ การรณรงค์ให้ความรู้ $\Delta > 0.9$ วิเคราะห์ได้ว่า ณ จุดสมดุลจะไม่มีโรคจึงไม่เกิดการแพร่ระบาดของโรคและค่า $R_0 > 1$ เมื่อประสิทธิภาพการรณรงค์ให้ความรู้ $\Delta < 0.8$ วิเคราะห์ได้ว่า ณ จุดสมดุลมีโรคจึงเกิดการแพร่ระบาดของโรค

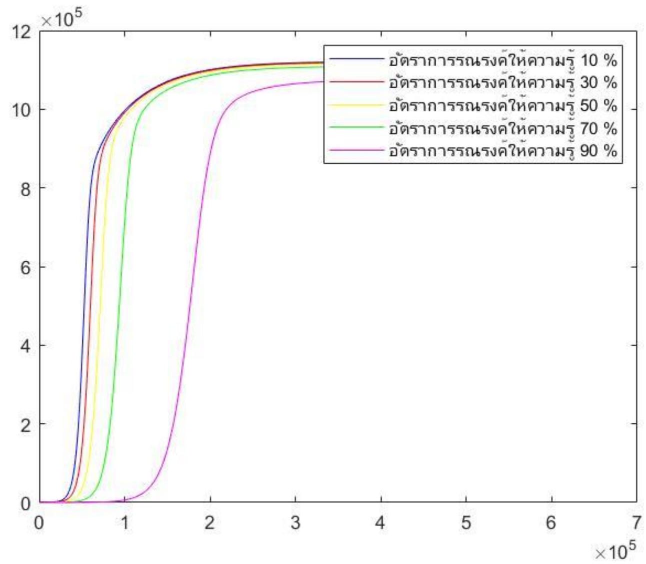
เมื่อพิจารณาเสถียรภาพของระบบ ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรค จะพบว่าค่า ลักษณะเฉพาะ $\lambda_1 = -0.0000481479, \lambda_2 = -0.0000481479, \lambda_3 = -0.000077798$ และ $\lambda_4 = -0.00007778$ ซึ่ง ทุกค่ามีส่วนจริงเป็นค่าลบ

และสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-Huewitz ส่งผลให้คำตอบจะลู่เข้าสู่จุด $E_0 = (416582, 0, 0,0)$ ดังนั้น จุดสมดุลไม่มีโรค E_0 จะเป็น Local Asymptotically (Fred Brauer, Pauline den Driessche and Jianhong Wu (Eds.), 2008)

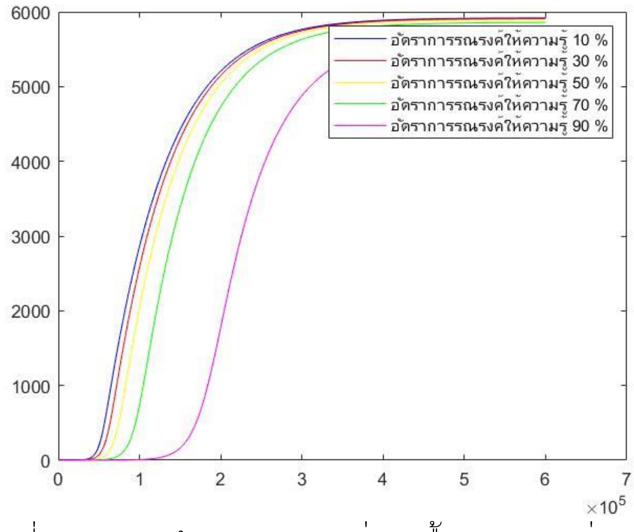
ดังนั้น จุดสมดุลที่มีโรค $E_1(\bar{S}, \bar{E}, \bar{I}, \bar{R})$ จะเป็น Local Asymptotically เมื่อแทนค่า $\Delta = 10\%, 30\%, 50\%, 70\%, 90\%$ ดังรูป



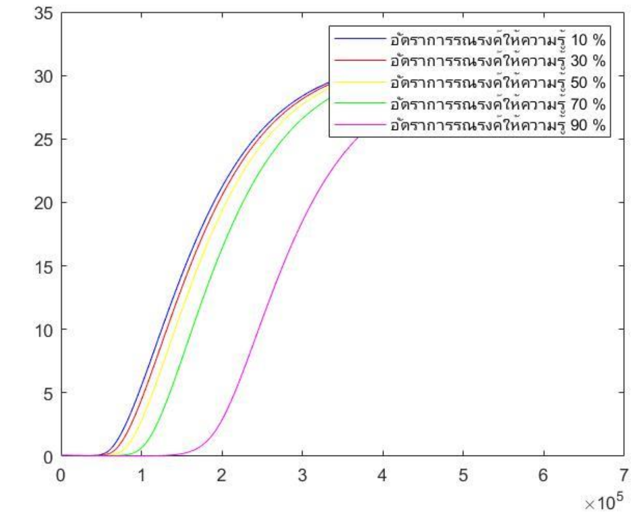
อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มเสี่ยง(S) ณ เวลา t ใดๆ
เมื่ออัตราการณรงค์ให้ความรู้ เท่ากับ 10%, 30%, 50%, 70% และ 90% ณ เสถียรภาพที่มีโรค



อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มติดเชื้อแต่ไม่สามารถ
ถ่ายทอดเชื้อได้(E) ณ เวลา t ใดๆ เมื่ออัตราการณรงค์ให้ความรู้ เท่ากับ 10%, 30%, 50%, 70%
และ 90% ณ เสถียรภาพที่มีโรค



อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้(I)
ณ เวลา t ใดๆ เมื่ออัตราการณรงค์ให้ความรู้ เท่ากับ 10%, 30%, 50%, 70% และ 90%
ณ เสถียรภาพที่มีโรค



อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มที่หาย(R) ณ เวลา t ใดๆ
เมื่ออัตราการณรงค์ให้ความรู้ เท่ากับ 10%, 30%, 50%, 70% และ 90% ณ เสถียรภาพที่มีโรค

4. ผลการวิจัยและอภิปรายผล

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการรณรงค์ป้องกันการแพร่ระบาดของโรคไข้ไทฟอยด์ และเพื่อวิเคราะห์เสถียรภาพของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโรคไข้ไทฟอยด์เพื่อการลดจำนวนผู้ป่วยลง

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไข้ไทฟอยด์ โดยการรณรงค์ให้ความรู้ ซึ่งผู้วิจัยได้พิจารณาพารามิเตอร์ 1 ตัว คือ การรณรงค์ให้ความรู้ ของโรค

ไข้ไทฟอยด์ ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ได้ทำการศึกษาครั้งนี้ คือ ระบบสมการที่ไม่เชิงเส้น ซึ่งประกอบด้วย กลุ่มประชากรที่เสี่ยงติดเชื้อ กลุ่มประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถแพร่เชื้อได้ กลุ่มประชากรที่ติดเชื้อและสามารถแพร่เชื้อได้ กลุ่มประชากรที่หายจากโรค จึงได้ทำการใช้วิธีการวิเคราะห์วิธีมาตรฐานและวิเคราะห์เชิงตัวเลข

ผู้วิจัยได้ศึกษาจุดสมดุลที่ไม่มีโรคและจุดสมดุลที่ของการแพร่ระบาดของโรค ด้วยวิธีการวิเคราะห์จุดสมดุลและเสถียรภาพของจุดสมดุลด้วยโดยวิเคราะห์วิธีมาตรฐาน ซึ่งค่าเสถียรภาพของระบบ Local Asymptotical Stable ที่ได้ต้องเป็นไปตาม เงื่อนไขของ Routh-Hurwitz เพื่อให้สามารถหาค่าพารามิเตอร์ R_0 ซึ่งมีความจำเป็น ภายใต้เงื่อนไขเพื่อให้Local Asymptotically stability of Equilibrium State ที่มีเสถียร ในส่วนของจุดสมดุลที่ไม่มีโรคและจุดสมดุลที่มีการแพร่ระบาดของโรคโดย $R_0 = \dfrac{\kappa(1-\Delta)\alpha\pi N}{\mu(\kappa+\mu)(\gamma+\mu)}$ สามารถพิจารณาค่าระดับการติดเชื้อ R_0 โดยค่า $R_0 < 1$ วิเคราะห์ได้ว่า ณ จุดสมดุลจะไม่มีโรคจึงไม่เกิดการแพร่ระบาดของโรคและค่า $R_0 > 1$ วิเคราะห์ ได้ว่า ณ จุดสมดุลมีการติดเชื้อ จึงเกิดการแพร่ระบาดของโรค (JantrapronSukawat and Surapol Naowarat, 2014)

5. สรุป

จากการวิจัยครั้งนี้ได้พบว่าประสิทธิภาพการรณรงค์ให้ความรู้ เป็นผลปัจจัยหนึ่งที่ ส่งผลต่อการเปลี่ยนแปลงของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ SEIR สำหรับการควบคุมการ แพร่ระบาดของโรคไข้ไทฟอยด์ โดยพบว่าถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อไข้ไทฟอยด์ ความรู้เกี่ยวกับการป้องกันโรคไข้ไทฟอยด์ น้อยจะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคเพิ่มขึ้น และถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อโรคไข้ไทฟอยด์ มีความรู้เกี่ยวกับการป้องกันโรคไข้ไทฟอยด์ เป็นจำนวนมากขึ้นจะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคลดลงจนกระทั่งไม่มีการแพร่ระบาดของโรค ดังนั้น สามารถนำผลจากการวิจัยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ SEIR สำหรับการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไข้ไทฟอยด์ โดยการรณรงค์ให้ความรู้ นำไปใช้เป็นข้อมูลเบื้องต้นในการป้องกันโรคเพื่อลดจำนวนผู้ป่วยและใช้เป็นข้อมูลทางวิชาการให้กับหน่วยงานที่เฝ้าระวัง ของสำนักระบาดวิทยา กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุข รวมทั้งนำเสนอข้อมูลต่อหน่วยงานด้านสาธารณสุขดำเนินการมาตรการควบคุมและป้องกันโรคไข้ไทฟอยด์ โดยการรณรงค์ให้ความรู้ ให้กับประชาชนทั่วไปที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ

6. ข้อเสนอแนะ

1. ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ผู้ศึกษาได้ศึกษานี้ นำไปประยุกต์ใช้กับโรคอื่นๆ ที่มีลักษณะการแพร่กระจายจากการสัมผัสและแพร่ระบาดได้

2. สามารถศึกษาองค์ประกอบอื่น ๆที่มีผลต่อการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไข้ไทฟอยด์โดยการเพิ่มค่าพารามิเตอร์อื่นที่สอดคล้องกับข้อมูลจริง

7. เอกสารอ้างอิง

กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุข. (2562). *สถานการณ์โรคไข้ไทฟอยด์ในประเทศไทย*. เข้าถึงได้จาก: www.ddc.moph.go.th.

แคทลียา ดวงเกตุ. (2556). *20 คำถามสำคัญของคณิตศาสตร์.* (พิมพ์ครั้งที่ 2). (น. 247-248). กรุงเทพมหานคร:มติชน

บัณฑิตย์ อันยงค์. (2558). *ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการแพร่ระบาดของโรคไข้เลือดออกโดยใช้การรณรงค์ให้ความรู้ กรณีศึกษาจังหวัดภูเก็ต.* ภูเก็ต: มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต.

สุรัชตา สังข์ทองจีน. (2558). *ผลการรณรงค์ให้ความรู้ที่มีผลต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ ระบาดของโรคตาแดง.* วิทยานิพนธ์ครุศาสตร์มหาบัณฑิตมหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี

อนุวัต จิรวัฒนพานิชและคณะ. (2559ข). ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ SEIR สำหรับการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคอีสุกอีใสโดยการรณรงค์ให้ความรู้. *วารสารวิชาการมหาลัยราชภัฏภูเก็ต.* ปีที่ 13 (2). (น. 254-275). ภูเก็ต: มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต.

อนุวัตร จิรวัฒนพาณิช และคณะ. (2559). *ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของ ไข้หวัดใหญ่โดยการสวมหน้ากากอนามัย.* การประชุมวิชาการระดับชาติมหาวิทยาลัยราชภัฏ สงขลา ครั้งที่ 6. มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา.15-16 สิงหาคม 2559.

Biophysics Group. (2009). *Mathermatics Model of transmission*. Faculty of science, Mahidol University.

Bureau of Epidemiotogy. (2016). *Conjunctivitis*. (Online).http://rnnvw.boe.moph.go.th/fac conjunctivitis, 13 August 2016.

JantapronSukawat and SurapolNaowarat. (2014). Effect of Rainfall on the transmission Model of Conjunctivitis. *Advancen in Environmental Biology*, 8(14): 99-104.