ผลของการรณรงค์การสวมหน้ากากอนามัยที่มีผลต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคหัด

เจษฎา สุจริตธุระการ

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต
email: toy.jedsada@gmail.com

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาและวิเคราะห์เสถียรภาพของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการรณรงค์การสวมหน้ากากอนามัยที่มีผลต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคหัด วิเคราะห์ตัวแบบโดยใช้วิธีมาตรฐาน ศึกษาจุดสมดุล ศึกษาเสถียรภาพของจุดสมดุล และหาคำตอบเชิงตัวเลข

ผลการวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ พบว่า ณ จุดสมดุลไม่มีโรคเมื่อมีค่าระดับการติดเชื้อ $R_0 = 0.114 < 1$ แสดงว่าไม่เกิดการแพร่ระบาดของโรคหัด และ ณ จุดสมดุลมีโรคมีค่าระดับการติดเชื้อ $R_0 = 10.417 > 1$ แสดงว่าเกิดการแพร่ระบาดของโรคหัด และการรณรงค์การสวมหน้ากากอนามัยเป็นปัจจัยที่มีผลต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีความรู้เกี่ยวกับการรณรงค์การสวมหน้ากากอนามัยต่อการแพร่ระบาดของโรคหัด และปฏิบัติตามสมมติฐานที่ตั้งไว้มากขึ้นจะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคลดลงจนไม่มีการแพร่ระบาดของโรค

คำสำคัญ: ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ , โรคหัด , การควบคุมการแพร่ระบาด

The effect of masked campaign on mathematical model for the transmission epidemic measles

Jedsada Sutjaritthurakan

[1]Faculty of Science and Technology, Phuket Rajabhat University, Phuket, Thailand

E-mail; toy.jedsada@gmail.com

Abstract

The objective of this research is to develop and evaluate the stability of mathematical modeling for masked campaign on mathematical model for the transmission epidemic measles. The model is analyzed using standard methods, the Equilibrium Point, stability of the Equilibrium Point and numerical solution are studied.

The mathematical model analyze’s result found that the Equilibrium Point has no transmission when the level of the disease reading is R_0=0.1114<1 which means there is no transmission of epidemic measles at this point. On the other hand, the Equilibrium Point has transmission when the level of disease reading is R_o=10.417>1 which means there is a transmission of epidemic measles. Masked campaign is the major factor on the mathematical model’s result. If the more people who has potential to have epidemic measles transmission has knowledge about masked campaign and follow the hypothesis suggested, the transmission will be decreased until there is no transmission at all.

Keywords: Mathematical modeling, chickenpox, control the spread

บทนำ

โรคหัดเป็นโรคไข้ออกผื่นที่พบบ่อยในเด็กเล็ก นับว่าเป็นโรคที่มีความสำคัญมากโรคหนึ่ง เพราะอาจมีโรคแทรกซ้อนทำให้ถึงเสียชีวิตได้เกิดจากเชื้อไวรัส(measles) ซึ่งอยู่ในตระกูล paramyxovirus ซึ่งเป็น rna ไวรัส ที่จะพบได้ในจมูก และลำคอของผู้ป่วย โรคหัดติดต่อกันได้ง่ายมาก โดยการไอ จาม หรือพูดกันในระยะใกล้ชิด เชื้อไวรัสจะกระจายอยู่ในละอองเสมหะ น้ำมูก น้ำลายของผู้ป่วย และเข้าสู่ร่างกายโดยทางการหายใจ บางครั้งเชื้ออยู่ในอากาศ เมื่อหายใจเอาละอองที่ปนเปื้อนเชื้อไวรัส (air borne) เข้าไปก็ทำให้เป็นโรคได้ ผู้ติดเชื้อจะเป็นโรคเกือบทุกรายถ้าไม่ได้รับวัคซีนป้องกันโรคเด็กมีโอกาสจะเป็นหัดได้เมื่อภูมิคุ้มกันที่ผ่านมาจากแม่หมดไปเมื่ออายุประมาณ 6-9 เดือน อายุที่พบบ่อยคือ 1-6 ปี ถ้าไม่มีภูมิต้านทานจะเป็นได้ทุกอายุ ในประเทศไทยเริ่มให้วัคซีนป้องกันหัด เมื่อ พ.ศ. 2527 ทำให้อุบัติการณ์ของโรคลดลงเป็นจำนวนมากโดยเฉพาะในเด็กอายุต่ำกว่า 5 ปี แต่ก็ยังพบโรคได้ประปราย และมีการระบาดเป็นครั้งคราวในชนบท ผู้ป่วยที่พบส่วนใหญ่จะเป็นเด็กที่ยังไม่ได้รับวัคซีน และเป็นเด็กอายุเกิน 5 ปี มากขึ้น ผู้ป่วยหัดจะมีเชื้อไวรัสในลำคอและแพร่เชื้อได้ในระยะจาก 1-2 วัน ก่อนที่จะเริ่มมีอาการ (3 ถึง 5 วัน ก่อนผื่นขึ้น) ไปถึงระยะหลังผื่นขึ้นแล้ว 4 วันระยะฟักตัวของโรค จากที่เริ่มสัมผัสโรคจนถึงมีอาการประมาณ 8-12 วัน เฉลี่ยจากวันที่สัมผัสจนถึงมีผื่นเกิดขึ้นประมาณ 14 วัน

อาการเริ่มด้วยมีไข้ น้ำมูกไหล ไอ ตาแดง ตาแฉะ และกลัวแสง อาการต่างๆ จะมากขึ้นพร้อมกับไข้สูงขึ้น และจะสูงเต็มที่เมื่อมีผื่นขึ้นในวันที่ 4 ของไข้ ลักษณะผื่นนูนแดง (maculo-papular) ติดกันเป็นปื้นๆ โดยจะขึ้นที่หน้า บริเวณชิดขอบผมแล้วแผ่กระจายไปตามลำตัว แขน ขา เมื่อผื่นแพร่กระจายไปทั่วตัว ซึ่งกินเวลาประมาณ 2-3 วัน ไข้ก็จะเริ่มลดลง ผื่นที่ระยะแรกมีสีแดงจะมีสีเข้มขึ้น เป็นสีแดงคล้ำ หรือน้ำตาลแดง ซึ่งคงอยู่นาน 5-6 วัน กว่าจะจางหายไปหมด กินเวลาประมาณ 2 สัปดาห์ บางครั้งจะพบผิวหนังลอกเป็นขุย การตรวจในระยะ 1-2 วัน ก่อนผื่นขึ้นจะพบจุดขาวๆ เล็กๆ มีขอบสีแดงๆ อยู่ในกระพุ้งแก้ม เรียกว่า (koplik’s spots) ซึ่งจะช่วยให้วินิจฉัยโรคหัดได้ก่อนที่จะมีผื่นขึ้น(กรมควบคุมโรค,2558)

การป้องกันที่ดีคือคนที่เป็นโรคหัด และคนที่สัมผัสใกล้ชิดควรจะสวมหน้ากากอนามัยป้องกันการติดต่อ โดยเฉพาะหากมีการระบาดของโรคหัด ควรสังเกตและดูแลคนในครอบครัวอย่างใกล้ชิด และให้สวมหน้ากากอนามัยป้องกันการแพร่กระจายเชื้อในอากาศ การสวมหน้ากากอนามัยเมื่อมีอาการป่วยเป็นไข้ หรือ ไอ จาม จะช่วยลดโอกาสการแพร่กระจายของเชื้อโรคระบบทางเดินหายใจได้ เพราะหากผู้ป่วยไม่สวมหน้ากากอนามัยขณะที่ไอหรือจาม จะสามารถแพร่เชื้อออกไปได้ไกล 1-5 เมตร ทำให้ผู้ที่อยู่ใกล้ชิดมีโอกาสรับเชื้อและป่วยเป็นโรคได้ จากผลการวิจัยขององค์การอนามัยโลก พบว่าการใส่หน้ากากอนามัยสามารถลดการแพร่กระจายเชื้อที่ติดมากับละอองฝอย ได้ถึงร้อยละ 80 ดังนั้น หน้ากากอนามัย จึงเป็นเครื่องมืออย่างหนึ่งที่สามารถป้องกันการแพร่ระบาดของเชื้อโรคได้เป็นอย่างดี

ในการศึกษาครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ทำการศึกษาข้อมูลของผู้ป่วยที่ได้รวบรวมจากกระทรวงสาธารณสุขตั้งแต่ปี พ.ศ. 2557 ถึง พ.ศ. 2558 พร้อมทั้งสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการแพร่ระบาดของโรคหัดที่มีผลต่อการใช้หน้ากากอนามัยเพื่อนำไปใช้เป็นข้อมูลเบื้องต้นในการป้องกันโรค ลดจำนวนผู้ป่วยและใช้เป็นข้อมูลทางวิชาการควบคู่กับสถิติการเกิดโรคของประเทศไทยทั่วภูมิภาคของโรคที่เฝ้าระวังของทางสำนักระบาดวิทยา กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุขต่อไป

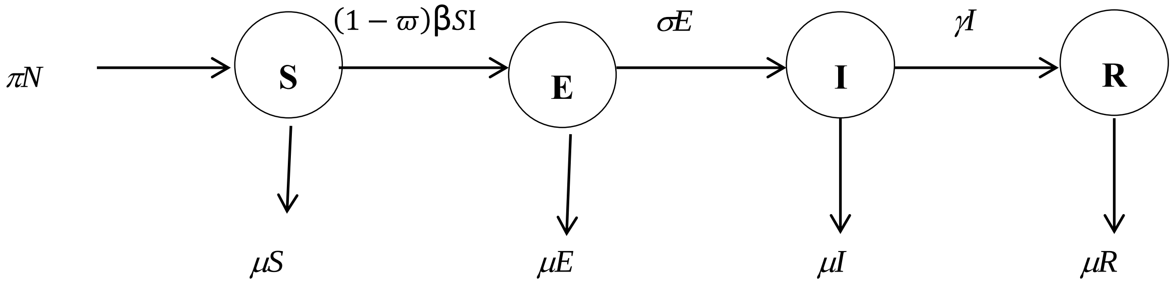
วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคหัดที่เป็นผลจากการรณรงค์การใช้หน้ากากอนามัย
2. เพื่อวิเคราะห์เสถียรภาพของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคหัดที่มีผลต่อการใช้หน้ากากอนามัย

ระเบียบวิธีวิจัย

การดำเนินการวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคหัด โดยผู้วิจัยดำเนินการตาม 3 ขั้นตอน ดังนี้

1.การพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยได้ศึกษาแผนภาพโมเดล SIER แสดงความสัมพันธ์ขององค์ประกอบในตัวแบบ ดังนี้



ภาพที่ 1 แสดงแผนภาพความสัมพันธ์ขององค์ประกอบการแพร่ระบาดของโรคหัด

เมื่อ

S(t)	แทน	จำนวนคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ณ เวลา t ใดๆ
E(t)	แทน	จำนวนคนที่ติดเชื้อแต่ยังไม่แสดงอาการ ณ เวลา t ใดๆ
I(t)	แทน	จำนวนคนที่ติดเชื้อ ณ เวลา t ใดๆ
R(t)	แทน	จำนวนคนที่มีภูมิคุ้มกันหรือหายจากโรค ณ เวลา t ใดๆ

2. การตรวจสอบตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

การตรวจสอบตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคหัด จัดทำเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของตัวแบบ ฉะนั้นจำเป็นต้องดำเนินการโดยผู้เชี่ยวชาญที่เกี่ยวข้องกับศาสตร์นี้โดยตรง ในงานวิจัยนี้จำเป็นต้องส่งตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดให้ผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบความถูกต้องโดย นักระบาดวิทยา
และนักคณิตศาสตร์

3. การวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

การวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่กล่าวต่อไปนี้เป็นการวิเคราะห์ตามแบบมาตรฐาน (standard method) โดยศึกษาจุดสมดุลและศึกษาเสถียรภาพของจุดสมดุลเพื่อหาเงื่อนไขของพารามิเตอร์ที่เหมาะสมของจุดสมดุลนั้น โดยวิธีเชิงวิเคราะห์และหาคำตอบเชิงตัวเลขของตัวแบบ

3.1วิเคราะห์ตามแบบมาตรฐาน

การศึกษาหาค่าจุดสมดุลและค่าเสถียรภาพของระบบ ได้ดังนี้

3.1.1 จุดสมดุล (Equilibrium point)ในการหาจุดสมดุลโดยใช้วิธีการคำนวณซึ่งทำได้โดยจัดสมการเชิงอนุพันธ์ที่ได้จากการแปลงสมการของตัวแบบใหม่ ให้เท่ากับ ศูนย์ ซึ่ง

$$\frac{dS}{dt}=N,\frac{dE}{dt}=0,\frac{dI}{dt}=0,\frac{dR}{dt}=0$$

เราจะได้ค่าจากการแก้สมการสองค่า คือ ค่าแรกเป็นค่าที่ทำให้จุดสมดุลไม่มีโรค (Disease free state : E_0) ในกรณีที่ไม่มีไวรัส จุดสมดุลก็ไม่มีเชื้อ ค่าที่สองเป็นค่าที่ทำให้จุดสมดุลเกิดการระบาดของโรค (Endemic disease state : E_1) ในกรณีที่กลุ่มติดเชื้อมีค่าเป็นบวก ดังนั้นจุดสมดุลจะกลายเป็นการระบาดของโรค

3.1.2 เสถียรภาพ (stability) โดยการหาค่าลักษณะเฉพาะซึ่งสามารถหาได้จากสมการลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมทริกซ์ $\det(J-\lambda I)=0$ โดยใช้วิธีการคำนวณเพื่ออธิบายคำตอบของสมการ เกี่ยวกับค่าความสมดุล เพื่อตรวจสอบว่าเป็น Local asymptotically stable

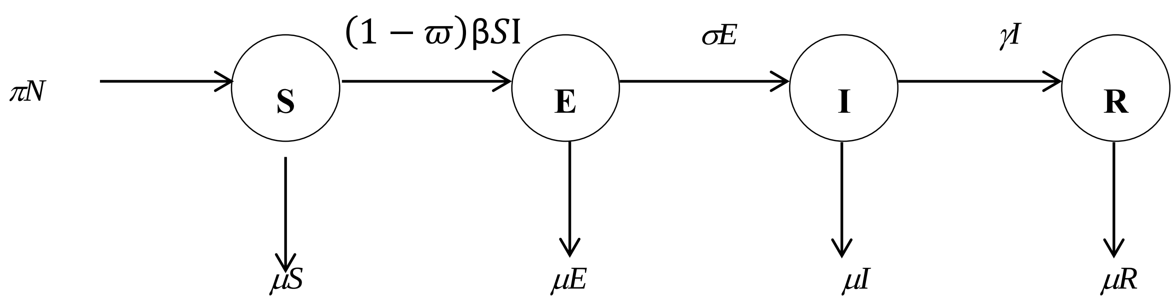
จากการตรวจสอบเงื่อนไข จะได้สมการลักษณะเฉพาะ เนื่องจากต้องการตรวจสอบเสถียรภาพของระบบ โดยดูจาก ค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมทริกซ์ต้องเป็นลบและสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz ซึ่งสามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณี ดังนี้

3.1.2.1 Local asymptotically stable ของจุดสมดุลไม่มีโรค โดยการตรวจสอบว่า ค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมทริกซ์ ณ สภาวะที่ไม่มีโรค (E_0) ซึ่งจะได้สมการลักษณะเฉพาะ และได้ค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมทริกซ์สอดคล้องกับเงื่อนไขของRouth-Hurwitz โดยลักษณะเฉพาะทุกค่าต้องเป็นลบจึงจะสอดคล้องตามเงื่อนไข $R_0<1$ ซึ่งสามารถคำนวณได้จากโปรแกรมสำเร็จรูป Mathematica

3.1.2.2 Local asymptotically stable ของจุดสมดุลที่มีโรค โดยการตรวจสอบว่าค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมทริกซ์ ณ สภาวะที่มีการระบาดของโรค (E_0) จะได้สมการลักษณะเฉพาะจาก $\det(J-\lambda I)=0$ ซึ่งค่าสัมประสิทธิ์ของสมการลักษณะเฉพาะเป็นลบซึ่งสอดคล้องตามเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz สำหรับค่าที่ได้ตามเกณฑ์ $R_0<1$ซึ่งสามารถคำนวณได้จากโปรแกรมสำเร็จรูป Mathematica

ผลการวิจัย

การสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการแพร่ระบาดโรคหัด



ภาพที่ 2 แสดงแผนภาพความสัมพันธ์ขององค์ประกอบการแพร่ระบาดของโรคหัด

จากภาพที่ 2 ผู้วิจัยได้ดำเนินการส่งให้ผู้เชี่ยวชาญที่เกี่ยวข้องได้แก่ ผู้ทรงคุณวุฒิทางคณิตศาสตร์และบุคลากรทางการแพทย์ช่วยตรวจสอบแผนภาพและสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น เมื่อผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบและให้ข้อเสนอแนะ ผู้วิจัยได้ทำการแก้ไข ปรับปรุงตามคำแนะนำแล้วนำตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ได้มาวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐาน ซึ่งจากภาพ 2 ได้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น ดังนี้

$$\frac{dS}{dt}=\pi N-(1-\varpi)\beta SI-\mu S \qquad \text{............ (1)}$$

$$\frac{dE}{dt}=(1-\varpi)\beta SI-E(\sigma+\mu) \qquad \text{............ (2)}$$

$$\frac{dI}{dt} = \sigma E - I(\gamma + \mu) \qquad \text{............ (3)}$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R \qquad \text{............ (4)}$$

$$\frac{dR}{dt} = 0$$

โดยที่ N = S + E + I + R จากสมการ (1), (2) และ (3) และ (4) ผู้วิจัยดำเนินการวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ได้ผลดังนี้

1. **จุดสมดุล (Equilibrium Points)**

การวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เป็นการวิเคราะห์ตามแบบมาตรฐาน (Standard method) โดยศึกษาจุดสมดุลและศึกษาเสถียรภาพของจุดสมดุลเพื่อหาเงื่อนไขของพารามิเตอร์ที่เหมาะสมกับจุดสมดุลนั้น โดยใช้วิธีเชิงวิเคราะห์และหาคำตอบเชิงตัวเลขของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโรคหัด ในการศึกษาจุดสมดุลทำได้โดยจัดสมการ (1), (2), (3) และ (4) ทางด้านขวามือ เท่ากับศูนย์

กำหนดให้ $\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dE}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0, \frac{dR}{dt} = 0$ จะได้

$$\frac{\pi N}{((1-\varpi)\beta I + \mu)} = S \qquad \text{............ (5)}$$

$$\frac{(1-\varpi)\beta I \pi N}{((1-\varpi)\beta I + \mu)(\sigma + \mu)} = E \qquad \text{............ (6)}$$

$$\frac{\sigma(1-\varpi)\beta\pi N - (\gamma + \mu)(\sigma + \mu)\mu}{(\gamma + \mu)(\sigma + \mu)(1-\varpi)\beta} = I \qquad \text{............ (7)}$$

$$R = \frac{\gamma I}{\mu} \qquad \text{............ (8)}$$

1.1จุดสมดุลไม่มีเชื้อ (Disease Free Equilibrium : DFE Point)แทนด้วย $E_0(S,E,I,R)$

กำหนดให้ $I = 0$ ในสมการ (5)

$$S = \frac{\pi N}{((1-\varpi)\beta I + \mu)} \text{ จะได้ } S = \frac{\pi N}{\mu} \text{ จาก } \pi = \mu \text{ จะได้ } S = N$$

แทน $I = 0$ ในสมการ (6)จะได้ $E = \frac{(1-\varpi)\beta I \pi N}{((1-\varpi)\beta I + \mu)(\sigma + \mu)}$ จะได้ $E = 0$

แทนค่า $I = 0$ ในสมการ (7) $R = \frac{\gamma I}{\mu}$ จะได้ $R = 0$

$$\therefore E_0(S,E,I,R) = E_0(N,0,0,0)$$

ความเสถียรของระบบ **(Stability of systems)** ที่จุด $E_0(N,0,0,0)$

หาเมทริกซ์จาโคเบียน (Jacobian Matrix) กำหนดให้

$$F_1(S,E,I,R) = \pi N - (1-\varpi)\beta SI - \mu S$$

$$F_2(S,E,I,R) = (1-\varpi)\beta SI - E(\sigma+\mu)$$
$$F_3(S,E,I,R) = \sigma E - I(\gamma+\mu)$$
$$F_4(S,E,I,R) = \gamma I - \mu R$$

พิจารณาเมทริกซ์จาโคเบียน ณ จุดสมดุลไม่มีเชื้อ $E_0(S,E,I,R) = E_0(N,0,0,0)$ จะได้

$$J_0 = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -(1-\varpi)\beta N & 0 \\ 0 & -(\sigma+\mu) & (1-\varpi)\beta N & 0 \\ 0 & \sigma & -(\gamma+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}$$

$$\det(J_0-\lambda) = \begin{bmatrix} -\mu-\lambda & 0 & -(1-\varpi)\beta N & 0 \\ 0 & -(\sigma+\mu)\lambda & (1-\varpi)\beta N & 0 \\ 0 & \sigma & -(\gamma+\mu)\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (-\mu-\lambda)\left[(-\mu-\lambda)(-(\sigma+\mu)\lambda)(-(\gamma+\mu)\lambda)\right] = 0$$

ดังนั้น $\lambda_1 = -\mu, \lambda_2 = -\mu, \lambda_3 = -(\sigma+\mu), \lambda_4 = -(\gamma+\mu)$

$\lambda_1 = -0.0000372$, $\lambda_2 = -0.0000372$, $\lambda_3 = -0.0670372$, $\lambda_4 = -0.3300372$

$R_0 = 0.114$

1.2 จุดสมดุลที่มีเชื้อโรค(Disease Endemic Equilibrium : DEE) แทนด้วย $E_1(S^*,E^*,I^*,R^*)$

พิจารณา $I \neq 0$, $I > 0$ จะได้ $S^* = \dfrac{\pi N}{((1-\varpi)\beta I^* + \mu)}$, $E^* = \dfrac{(1-\varpi)\beta I^* \pi N}{((1-\varpi)\beta I^* + \mu)(\sigma+\mu)}$

, $I^* = \dfrac{\sigma(1-\varpi)\beta I \pi N - (\gamma+\mu)(\sigma+\mu)\mu}{(\gamma+\mu)(\sigma+\mu)(1-\varpi)\beta}$ และ $R^* = \dfrac{\gamma I^*}{\mu}$

2. การหาค่าระดับการติดเชื้อ (Basic Reproductive Number (R_0)**)**

$$\frac{dX}{dt} = F(X) - V(X)$$

เมื่อ F คือ เมทริกซ์ของจำนวนผู้ป่วยที่เพิ่มขึ้น

V คือ เมทริกซ์ของจำนวนผู้ป่วยที่เปลี่ยนสถานะจากกลุ่มหนึ่งไปอีกกลุ่มหนึ่ง

$$X = \begin{bmatrix} S \\ E \\ I \\ R \end{bmatrix} F(X) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (1-\varpi)\beta SI \\ 0 \end{bmatrix} V(X) = \begin{bmatrix} -\pi N + (1-\varpi)\beta SI + \mu S \\ E(\sigma+\mu) \\ -\sigma E + I(\gamma+\mu) \\ -\gamma I + \mu R \end{bmatrix}$$

หาค่าเมทริกซ์จาโคเบียนของ F(X) และ V(X) ซึ่งให้ DF(X) = F และ DV(X) = V จะได้ดังนี้

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1-\varpi)\beta I & 0 & (1-\varpi)\beta S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{และ } V = \begin{bmatrix} (1-\varpi)\beta I + \mu & 0 & (1-\varpi)\beta S & 0 \\ 0 & (\sigma+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & (\gamma+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma & \mu \end{bmatrix}$$

หาค่าเมทริกซ์จาโคเบียนของ F และ V ที่จุด $E_0(S,E,I,R) = E_0(N,0,0,0)$

$$F(E_0)=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&(1-\varpi)\beta N&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$ และ $$V(E_0)=\begin{bmatrix}\mu&0&(1-\varpi)\beta N&0\\0&(\sigma+\mu)&0&0\\0&-\sigma&(\gamma+\mu)&0\\0&0&-\gamma&\mu\end{bmatrix}$$

คำนวณหาค่าเมทริกซ์จาโคเบียน FV^{-1} โดยที่ V^{-1} หาได้จาก $V^{-1}=\dfrac{1}{\det(V)}adj(V)$ จะได้

$$\rho FV^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&\dfrac{-\sigma(1-\varpi)\beta N}{(\sigma+\mu)(\gamma+\mu)}&\dfrac{(1-\varpi)\beta N}{(\gamma+\mu)}&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

คำนวณหาค่า Spectral radius ของ FV^{-1} เขียนแทนด้วย $\rho(FV^{-1})$ จะได้ดังนี้

$$\det(FV^{-1}-\lambda I)=\begin{bmatrix}-\lambda&0&0&0\\0&-\lambda&0&0\\0&\dfrac{-\sigma(1-\varpi)\beta N}{(\sigma+\mu)(\gamma+\mu)}&\dfrac{(1-\varpi)\beta N}{(\gamma+\mu)}-\lambda&0\\0&0&0&-\lambda\end{bmatrix}$$

$$=(-\lambda)(-\lambda)(-\lambda)\left(\frac{(1-\varpi)\beta N}{(\gamma+\mu)}-\lambda\right)$$

จะได้ $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3=0$ และ $\lambda_4=\dfrac{(1-\varpi)\beta N}{(\gamma+\mu)}$

จากบทนิยาม Spectral radius ของ FV^{-1}คือm $\rho(FV^{-1})=\dfrac{(1-\varpi)\beta N}{(\gamma+\mu)}$ และหาค่า Basic Reproductive Number R_0 ได้จาก $\rho(FV^{-1})$ คือ $R_0=\dfrac{(1-\varpi)\beta N}{(\gamma+\mu)}$

ค่า R_0 ณ จุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อ มีค่าเท่ากับ 0.114 แสดงว่าเมื่อ $R_0<1$จะไม่เกิดการแพร่ระบาดของโรค
ค่า R_0 ณ จุดสมดุลที่มีเชื้อ มีค่าเท่ากับ 10.417 แสดงว่าเมื่อ $R_0>1$จะไม่เกิดการแพร่ระบาดของโรค

ตารางที่ 1 ค่าพารามิเตอร์ของจุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อโรค

ข้อความ	สัญลักษณ์	ค่าพารามิเตอร์	หน่วย
จำนวนประชากรของมนุษย์ทั้งหมด	N	50000	คน
อัตราการเกิดโรคของประชากร	π	0.0000372	ต่อวัน
อัตราการติดเชื้อโรคหัดจากคนสู่คน	β	0.000005	ต่อวัน
อัตราการตายโดยธรรมชาติ	μ	0.0000372	ต่อวัน
อัตราการป้องกันโรคโดยการใช้หน้ากากอนามัย	ϖ	0.85	ต่อวัน
อัตราการหายจากโรคของประชากร	γ	0.33	คน/วัน
อัตราการเกิดโรคแทรกซ้อน	σ	0.067	คน/วัน

3.เสถียรภาพของจุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อโรค(Local asymptotically stable)

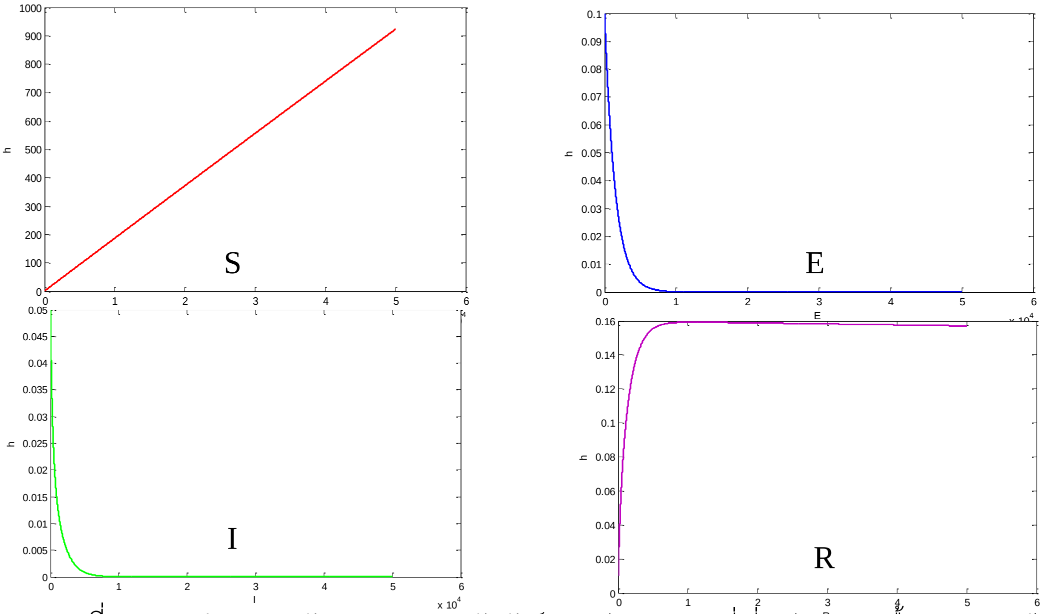
พิจารณาระบบสมการลักษณะเฉพาะและหาค่าลักษณะเฉพาะ

$\lambda_1 = -\mu, \lambda_2 = -\mu, \lambda_3 = -(\sigma+\mu), \lambda_4 = -(\gamma+\mu)$ $R_0 = \dfrac{(1-\varpi)\beta N}{(\gamma+\mu)}$ เมื่อแทนค่าพารามิเตอร์ จะได้

$\lambda_1 = -0.0000372, \lambda_2 = -0.0000372, \lambda_3 = -0.0670372, \lambda_4 = -0.3300372$ และ $R_0 = 0.114$

เมื่อพิจารณาเสถียรภาพของระบบ ณ จุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อโรค จะพบว่าค่าลักษณะเฉพาะทุกค่ามีส่วนจริงเป็นลบ และสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-Huewitz ดังนั้น คำตอบจะลู่เข้าสู่จุด $E_0 = (50000,0,0,0)$ นั้นคือจุดสมดุลไม่มีเชื้อ $E_0 = (50000,0,0,0)$ จะเป็น Local asymptotically stable

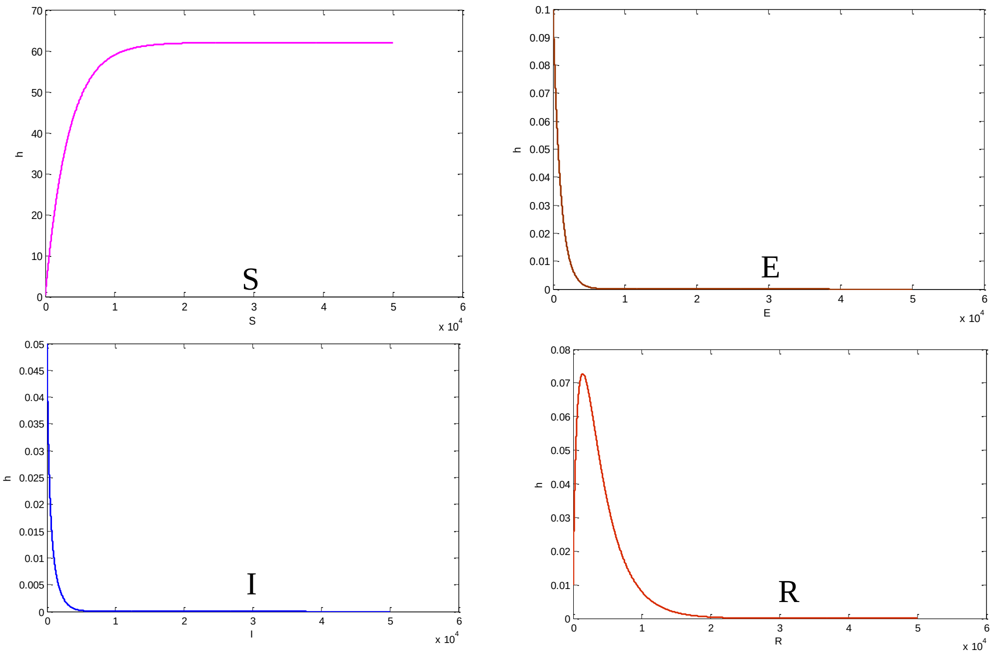
กราฟแสดงคำตอบเชิงตัวเลขของจุดสมดุลที่ไม่มีโรคได้ดังนี้



ภาพที่ 3 กราฟคำตอบเชิงตัวเลขแสดงความสัมพันธ์ของกลุ่มประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (S) กราฟคำตอบเชิงตัวเลขแสดงความสัมพันธ์ของกลุ่มประชากรที่ติดเชื้อแต่ยังไม่แสดงอาการ (E) กราฟคำตอบเชิงตัวเลขแสดงความสัมพันธ์ของกลุ่มประชากรที่ติดเชื้อ (I) และ กราฟคำตอบเชิงตัวเลขแสดงความสัมพันธ์ของกลุ่มประชากรที่หายจากโรค (R) ณ t เวลาใดๆ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลที่ไม่มี เชื้อโรคเมื่อค่า $R_0 < 1$

4.**เสถียรภาพของจุดสมดุลที่มีเชื้อโรค (Local asymptotically stable)**

กราฟแสดงคำตอบเชิงตัวเลขของจุดสมดุลที่มีโรค



ภาพที่ 4 กราฟคำตอบเชิงตัวเลขแสดงความสัมพันธ์ของกลุ่มประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ *(S)* กราฟคำตอบเชิงตัวเลขแสดงความสัมพันธ์ของกลุ่มประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่แสดงอาการ *(E)* กราฟคำตอบเชิงตัวเลขแสดงความสัมพันธ์ของกลุ่มประชากรที่ติดเชื้อ *(I)* และกราฟคำตอบเชิงตัวเลขแสดงความสัมพันธ์ของกลุ่มประชากรที่หายจากโรค*(R)* ณ t เวลาใดๆ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลที่มีเชื้อโรค เมื่อค่า $R_0 > 1$

สรุปและอภิปรายผล

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาผลของการใช้หน้ากากอนามัยที่มีต่อการแพร่ระบาดของโรคหัด ซึ่งผู้วิจัยได้พิจารณาพารามิเตอร์ 1 ตัว คือ การป้องกันโรคโดยใช้หน้ากากอนามัย มีผลต่อการควบคุมโรคหัดโดยผู้วิจัยได้พัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการแพร่ระบาดของโรคหัด การศึกษาวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเพื่อพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคหัดเพื่อวิเคราะห์เสถียรภาพของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคหัดที่มีผลต่อการใช้หน้ากากอนามัย และเพื่อศึกษาผลของการใช้หน้ากากอนามัยที่มีผลต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคหัด

การวิเคราะห์เชิงตัวเลขในการศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์โดยการหาคำตอบเชิงตัวเลขของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่แสดงแบบจำลองคณิตศาสตร์ที่มีผลต่อการแพร่ระบาดของโรคหัด เพื่อหาค่าพารามิเตอร์ที่ทำให้จุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อโรค (Disease Free Equilibrium) และจุดสมดุลที่มีเชื้อโรค (Disease Endemic Equilibrium) สำหรับแต่ละชุดของค่าพารามิเตอร์จะตรวจสอบเสถียรภาพของจุดสมดุลว่าเป็น Local asymptotically stable โดยการหาค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์จาโคเบียนและตรวจสอบว่าสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh – Hurwitz Criteria

ผู้วิจัยได้นำตัวแบบของการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคหัด ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น ซึ่งประกอบด้วย ประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ประชากรที่ติดเชื้อแต่ยังไม่แสดงอาการ และประชากรที่ติดเชื้อ ซึ่งพบว่างานวิจัยครั้งนี้มีสองจุดสมดุล คือ จุดสมดุลที่ไม่มีโรค และจุดสมดุลที่เกิดการระบาดของโรค โดยในการวิเคราะห์จุดสมดุลและเสถียรภาพของจุดสมดุล ใช้วิธีการวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐาน โดยค่าเสถียรภาพของระบบ

Local asymptotically stable ของจุดสมดุลที่ได้ต้องเป็นไปตามเงื่อนไขของ Routh – Hurwitz Criteria ทำให้สามารถพบค่าพารามิเตอร์ของ R_0 ซึ่งมีความจำเป็นภายใต้เงื่อนไข เพื่อให้ Local asymptotically stable ของจุดสมดุลมีความเสถียร ในจุดสมดุลของจุดสมดุลที่ไม่มีโรค และจุดสมดุลที่เกิดระบาดของโรค

จากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขเพื่อศึกษาจุดสมดุลของระบบ ศึกษาเสถียรภาพของจุดสมดุล และตรวจสอบเสถียรภาพของจุดสมดุลว่าเป็น Local asymptotically stable และตรวจสอบว่าสอดคล้องตามเงื่อนไขของ Routh – Hurwitz Criteria จากนั้นคำนวณหาค่า Basic reproductive Number (R_0) ศึกษาจุดสมดุล 2 จุด คือ

1. จุดสมดุลที่ไม่มีโรค (Disease Free Equilibrium) หาคำตอบเชิงตัวเลขและค่าพารามิเตอร์ที่ทำให้เสถียรภาพของจุดสมดุลเป็น Local asymptotically stable

สนใจพารามิเตอร์ ϖ การป้องกันโรคโดยการใช้หน้ากากอนามัย กำหนดให้ ϖ = 0.85 คำตอบเชิงตัวเลขที่จุดสมดุลที่ไม่มีโรค ได้ค่า $R_0 = 0.114 < 1$ แสดงว่าไม่เกิดการแพร่ระบาดของโรค

2. จุดสมดุลที่มีเชื้อโรค (Disease Endemic Equilibrium) หาคำตอบเชิงตัวเลขและค่าพารามิเตอร์ที่ทำให้เสถียรภาพของจุดสมดุลเป็น Local asymptotically stable

สนใจพารามิเตอร์ ϖ การป้องกันโรคโดยการใช้หน้ากากอนามัย กำหนดให้ ϖ = 0.85 คำตอบเชิงตัวเลขที่จุดสมดุลที่ไม่มีโรค ได้ค่า $R_0 = 10.417 > 1$ แสดงว่าเกิดการแพร่ระบาดของโรค

ข้อเสนอแนะ

จากผลของการวิจัยครั้งนี้ ค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ซึ่งเป็นจำนวนการใช้หน้ากากอนามัย ในแต่ละพื้นที่อาจจะแตกต่างกัน ดังนั้น ควรมีการตรวจสอบคนกลุ่มเสี่ยงและติดเชื้อในพื้นที่นั้นๆ อย่างละเอียดอีกครั้งเพื่อความถูกต้อง

เอกสารอ้างอิง

กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุข. (2558). สถานการณ์โรคหัดในประเทศไทยเข้าถึงได้จาก:www.ddc.moph.go.th

เตชินี สถิตเดช. (2558). ผลของการควบคุมที่มีต่อการระบาดโรคอหิวาตกโรค. วิทยานิพนธ์ครุศาสตร์ศาสตร์มหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี.

ปาริฉัตร คล้ายรุ่ง. (2558).ผลการรณรงค์ให้ความรู้ที่มีผลต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคหัด. วิทยานิพนธ์ครุศาสตร์มหาบัณฑิตมหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี

สุรัชตา สังข์ทองจีน. (2558). ผลการรณรงค์ให้ความรู้ที่มีผลต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคตาแดง. วิทยานิพนธ์ครุศาสตร์มหาบัณฑิตมหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี

สำนักโรคติดต่อทั่วไป กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุข. (2558). กรุงเทพมหานคร

อนุวัตร จิรวัฒนพาณิช และคณะ(2559ก). ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของไข้หวัดใหญ่โดยการสวมหน้ากากอนามัย.การประชุมวิชาการระดับชาติมหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา ครั้งที่ 6. มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา.15-16 สิงหาคม 2559.

Anderson, Roy M., and Robert M. May. (1991). Infectious diseases of humans: dynamics and control.Oxford: Oxford University Press.

A. d'Onofrio. (2002). Pulse vaccination strategy in the SIR epidemic model: Global asymptotic stable eradication in presence of vaccine failures Mathematical Biosciences, 36 (4/5): 473–489.

Biophysics Group. (2009). Mathermatics Model of transmission. Faculty of science,Mahidol University.

Bureau of Epidemiotogy. (2016). Conjunctivitis. (Online).http://rnnvw.boe.moph.go.th/fac conjunctivitis, 13 August 2016.

C.M. Kribs-Zaleta, J.X. Valesco-Hernández. (2000). A simple vaccination model with multiple endemic states. Mathematical Biosciences, 164 (2): 183–201.

Esteva, L. &Vagus,C. (1998). Analysis of a dengue disease Transmission model.Mathematical Bioscience.150,131-151.

JantapronSukawat and SurapolNaowarat. (2014). Effect of Rainfall on the transmission Model of Conjunctivitis. Advancen in Environmental Biology, 8(14): 99-104.

Kermack, W. O. and McKendrick, A. G. (1927). A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics. Proc. Roy. Soc. Lond. A 115: 700-721.

Leah, E.K., (1998). Mathematical Models in Biology. New York : Random House.

S. Okyere-Siabouh and I. A. Adetunde. (2013). Mathematical Model for the Study of   Measles in Cape Coast Metropolis.Texas 101-133, USA