การพิสูจน์ความสัมพันธ์ตัวอย่างชุดจำนวนตามทฤษฎีบทปีทาโกรัส ที่เริ่มจากจำนวนคี่บวก

Proof of Relationship with the Numerical Series as Following the Pythagorean Theorem Using the Odd Positive Numbers

นายอนุวัตร จิรวัฒนพาณิช[1] นายวันชัย ทัพพะปุรณะ[2] ดร.ป.ปัทมา เหมมาชูเกียรติกุล[3]
[1,2,3]สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต
[1]โทรศัพท์086-2727610 อีเมล์ anuwut_@hotmail.com
[2]โทรศัพท์081-2715721 อีเมล์ wanchai.t@pkru.ac.th
[3]โทรศัพท์086-4146080 อีเมล์ porpattama@gmail.com

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการศึกษาและการหาแบบรูปทั่วไปในการหาตัวอย่างชุดจำนวนตามทฤษฎีบทปีทาโกรัสที่เริ่มจากจำนวนคี่บวกเพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากคือกำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับผลรวมของกำลังสองของความยาวของด้านประกอบมุมฉากทั้งสองด้าน โดยพิสูจน์ตามหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ได้แก่ ขั้นที่ 1 พิสูจน์ว่า P(3) เป็นจริง และขั้นที่ 2 พิสูจน์ว่าสำหรับจำนวนบวกคี่ใดๆ ที่มากกว่า 1 ถ้า P(k) เป็นจริงแล้ว P(k+1) เป็นจริงรวมทั้งตรวจสอบความสัมพันธ์ของข้อความ P(n)

จากการศึกษาพบว่า ความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก คือ a=n, b=$\left(\frac{n^2-1}{2}\right)$, c=$\left(\frac{n^2-1}{2}+1\right)$ หรือ c=b+1 โดยที่ a, b คือ ความยาวด้านประกอบมุมฉาก และ c คือความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก จะได้ความสัมพันธ์ $n^2+\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{n^2-1}{2}+1\right)^2$ โดยที่ n เป็นจำนวนคี่บวกและ $n>1$ จากการพิสูจน์ข้อความพบว่า เมื่อกำหนดให้ n=3 จะได้ P(3) เป็นจริงเมื่อกำหนดให้ n=k จะได้ P(k) เป็นจริงและเมื่อกำหนดให้ n=k+1 จะได้ P(k+1) เป็นจริง

คำสำคัญ: ทฤษฎีบทปีทาโกรัส, การพิสูจน์ตามหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์, จำนวนคี่

Abstract

This paper studied and looked for patterns of the numerical series as following Pythagorean Theorem with the odd positive numbers. It also studied therelationship between three sides of right triangle as the square of the hypotenuse length was equal to the sum of the legs length's squares. The mathematical induction proof had two steps: 1) to prove P(3) is true 2) to prove for odd positive numbers more than one, if P(k) is true then P(k+1) is true and including investigate relationship of statement P(n).

Results showed the relationship between three sides of right triangle is a=n, b=$\left(\frac{n^2-1}{2}\right)$, c=$\left(\frac{n^2-1}{2}+1\right)$ or c=b+1, where a, b are length of legs right angle and c is the length of the hypotenuse. Hence, the relationship $n^2+\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{n^2-1}{2}+1\right)^2$, n is odd positive numbers and $n>1$ Following the statement proof found, giving n=3 so P(3) is true when giving n=k so P(k) is true and giving n=k+1 then P(k+1) is true.

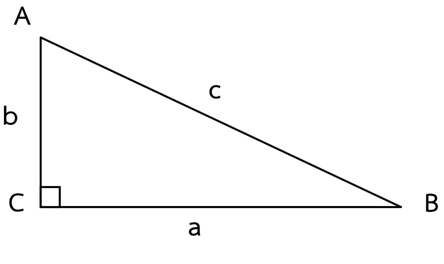
Keyword: Pythagorean Theorem, Mathematical Induction Proof, Odd Number

1. บทนำ

การศึกษาคณิตศาสตร์นั้นบางกรณีอาจจะพบแบบรูป หรือประโยคทางคณิตศาสตร์แล้วจะต้องทำนายแบบรูปทั่วไป หรือข้อความคาดการณ์ซึ่งไม่สามารถทราบได้ว่ารูปแบบที่เราได้กำหนดมาเป็นจริงหรือเท็จ หากตรวจสอบโดยการแทนค่าเข้าไปในข้อความคาดการณ์ทั้งหมดอาจทำไม่ได้เนื่องจากจำนวนที่จะแทนค่ามีมากจนนับไม่ถ้วน ดังนั้นกระบวนการให้เหตุผล (Reasoning process) จึงเป็นเครื่องมือที่นักคณิตศาสตร์ใช้แสวงหาความรู้ใหม่ๆโดยการนำเอาความจริงอย่างใดอย่างหนึ่งหรือหลายอย่างในระบบซึ่งเรียกว่าเหตุหรือข้อตั้ง (Premises) มาวิเคราะห์แจกแจงแสดงความสัมพันธ์เพื่อให้เกิดความจริงอันใหม่ขึ้นซึ่งเรียกว่าผลหรือผลสรุป (Conclusion) ดังนั้นผู้วิจัยจึงค้นหากระบวนการ วิธีการหรือสูตรทางคณิตศาสตร์โดยใช้การให้เหตุผลเชิงอุปนัย (Inductive Reasoning) เพื่อเป็นการสรุปความรู้ใหม่หรือสรุปผลการค้นหาความจริงของข้อความคาดการณ์โดยอาศัยข้อสังเกตหรือผลการทดลองหลายๆตัวอย่างจากกรณีย่อยๆแล้วสรุปเป็นความรู้แบบทั่วไป (วิจิตรา อุปการนิติเกษตร, 2556)

การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ถือว่าเป็นหัวใจสำคัญในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เป็นการฝึกทักษะกระบวนการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ โดยการนำกฎเกณฑ์เบื้องต้นในวิชาตรรกศาสตร์ มาประยุกต์ใช้ เพื่อเป็นรากฐานสำหรับแขนงวิชาคณิตศาสตร์ขั้นสูงต่อไปจุดมุ่งหมายโดยรวมของการพิสูจน์เพื่อเป็นการยืนยันหรือทำให้แน่ใจว่า ผลสรุปเป็นจริง โดยมีการกำหนดเงื่อนไข หรือ สมมติฐานมาก่อนหน้าซึ่งจะใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ในการตรวจสอบความสมเหตุสมผลของข้อความคาดการณ์ที่กำหนด(วัชรพงษ์ อนรรฆเมธี, 2558)

ความสัมพันธ์ตามทฤษฎีบทพีทาโกรัสระหว่างด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากคือกำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับผลรวมของกำลังสองของความยาวของด้านประกอบมุมฉากทั้งสองด้าน หรือความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่เกิดจากความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก กล่าวไว้ดังนี้ใน สามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีด้านเป็นด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับผลรวมพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีด้านเป็นด้านประกอบมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากนั้นตามทฤษฎีบทดังกล่าวสามารถเขียนเป็นสมการแสดงความสัมพันธ์ของความยาวของด้าน a, b และ c ได้ ซึ่งเรียกว่า สมการปีทาโกรัสสามารถเขียนในรูปสมการ $c^2=a^2+b^2$ โดยที่ c เป็นความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก และ a และ b เป็นความยาวของด้านประกอบมุมฉาก ดังภาพที่ 1



$c^2=a^2+b^2$

ภาพที่ 1 ความสัมพันธ์ของความยาวด้านทั้งสามด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จากความสัมพันธ์ดังกล่าวสามารถเขียนชุดจำนวนตามทฤษฎีบทปีทาโกรัสที่เป็นจำนวนเต็มได้ดังนี้ (1) 3,4,5 (2) 5,12,13(3) 7,24,25(4) 8,15,17(5) 9,40,41(6) 11,60,61(7)12,35,37 (8)20,21,29 เป็นต้น โดยจำนวนสองจำนวนแรกจะเป็นความยาวของด้านประกอบมุมฉาก และจำนวนในลำดับที่สามจะเป็นความยาวด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ในทางกลับกันทฤษฎีบทปีทาโกรัสมีบทกลับซึ่งสามารถพิสูจน์ได้โดยกำหนดสามเหลี่ยมABC มีด้านสามด้านที่มีความยาว a,b และ c และมีความสัมพันธ์ $c^2 = a^2 + b^2$ แสดงว่ามุมระหว่าง a และ b จะเป็นมุมฉากรวมทั้งสามารถนำไปหาความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม,มุมฉาก หรือ มุมป้าน ได้ เมื่อกำหนดให้ c เป็นความยาวของด้านที่ยาวที่สุดในรูปสามเหลี่ยม ดังนี้

1. ถ้าความยาวด้านมีความสำพันธ์ $a^2 + b^2 = c^2$ รูปสามเหลี่ยมนั้นจะเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
2. ถ้าความยาวด้านมีความสำพันธ์ $a^2 + b^2 > c^2$ รูปสามเหลี่ยมนั้นจะเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม
3. ถ้าความยาวด้านมีความสำพันธ์ $a^2 + b^2 < c^2$ รูปสามเหลี่ยมนั้นจะเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้าน

การพิสูจน์โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematics induction) เป็นการพิสูจน์ข้อความที่เกี่ยวกับจำนวนนับที่ข้อความอยู่ในรูป $\forall n \in \mathbf{N}, \mathbf{P(n)}$ ซึ่งการพิสูจน์ข้อความในรูปแบบดังกล่าวต้องอาศัยวิธีการทางคณิตศาสตร์และหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (เกษมสันต์ รุทธิ์อมร, 2557) มีรายละเอียด ดังนี้

หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Principle of Mathematical Induction)
สำหรับแต่ละจำนวนนับ n และ P(n) เป็นประโยคเปิดที่มี n เป็นตัวแปร
ถ้า 1) P(1) เป็นจริง
และ 2) สำหรับจำนวนนับ k ใดๆถ้า P(k) เป็นจริงแล้ว P(k +1) เป็นจริงแล้ว P(n) เป็นจริงสำหรับจำนวนนับ n ใดๆ

หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เปรียบเสมือนกับการนำเสามาตั้งเรียงกันเมื่อเสาต้นที่ 1 ล้มหรือเสาต้นใดต้นหนึ่งล้มจะทำให้เสาต้นถัดไปล้มตามเสมอดังนั้นการเขียนพิสูจน์ตามหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สำหรับข้อความ $\forall n \in \mathbf{N}, \mathbf{P(n)}$ จึงแบ่งขั้นตอนพิสูจน์ออกเป็นสองขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 พิสูจน์ว่าP(1) เป็นจริง

ขั้นที่ 2 พิสูจน์ว่าสำหรับจำนวนนับใดๆถ้าP(k) เป็นจริงแล้วP(k+1) เป็นจริง

จากการค้นคว้าเพิ่มเติมเกี่ยวกับการสร้างชุดจำนวนตามทฤษฎีบทปีทาโกรัสสามารถดำเนินการโดยการนำความยาวทั้งสามด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากคูณค่าคงที่ใดๆจะได้ชุดจำนวนตามทฤษฎีบทปีทาโกรัสชุดใหม่ เช่น ชุดจำนวนตามทฤษฎีบทปีทาโกรัส 3, 4, 5 ถ้าคูณด้วย 2 ทุกจำนวน จะได้ชุดจำนวนตามทฤษฎีบทปีทาโกรัสเป็น 6,8,10 ถ้าคูณด้วย 3 ทุกจำนวน จะได้ชุดจำนวนตามทฤษฎีบทปีทาโกรัสเป็น9, 12, 15 และถ้าคูณด้วย 4 ทุกจำนวน จะได้ชุดจำนวนตามทฤษฎีบทปีทาโกรัสเป็น 12, 16, 20 เป็นต้น ด้วยวิธีดังกล่าวสามารถสร้างชุดจำนวนตามทฤษฎีบทปีทาโกรัสได้จำนวนหลายชุด (พัฒนี อุดมกะวานิช, 2556)

จากการสังเกตชุดจำนวนตามทฤษฎีบทปีทาโกรัสได้แก่(1) 3,4,5 (2) 5,12,13 (3) 7,24,25 (4) 9,40,41 (5) 11,60,61 เป็นต้น ผู้วิจัยได้ใช้กระบวนการการให้เหตุผลเชิงอุปนัยในการศึกษาหาความสัมพันธ์ซึ่งผู้วิจัยได้ค้นพบความสัมพันธ์ของความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากคือ เมื่อด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีความยาวน้อยสุดและเป็นจำนวนคี่ที่มากกว่า 1เป็นด้านแรก จะได้ด้านประกอบมุมฉากด้านที่สองโดยนำด้านที่มีความยาวน้อยสุดหรือด้านแรกยกกำลังสองแล้วลบด้วยหนึ่งและหลังจากนั้นนำไปหารด้วยสอง และความยาวด้านตรงข้ามมุมฉากสามารถหาได้โดยนำความยาวด้านที่สองบวกด้วยหนึ่งจากวิธีการดังกล่าวสามารถสร้างชุดจำนวนตามทฤษฎีบทปีทาโกรัสได้อีกมากมาย ดังนั้นผู้วิจัยจึงต้องการพิสูจน์วิธีการที่ค้นพบจึงดำเนินการวิจัยเรื่องการพิสูจน์ความสัมพันธ์ตัวอย่างชุดจำนวนตามทฤษฎีบทปีทาโกรัสที่เริ่มจากจำนวนคี่บวก

2. วัตถุประสงค์

1. เพื่อสร้างตัวอย่างชุดจำนวนตามทฤษฎีบทปีทาโกรัสที่เริ่มจากจำนวนคี่บวก
2. เพื่อสร้างสูตรการคำนวณตัวอย่างชุดจำนวนตามทฤษฎีบทปีทาโกรัสที่เริ่มจากจำนวนคี่บวก
3. เพื่อพิสูจน์ความสัมพันธ์ตัวอย่างชุดจำนวนตามทฤษฎีบทปีทาโกรัสที่เริ่มจากจำนวนคี่บวก โดยใช้วิธีการพิสูจน์ตามหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

3. วิธีดำเนินการวิจัย

การพิสูจน์ความสัมพันธ์ตัวอย่างชุดจำนวนตามทฤษฎีบทปีทาโกรัสที่เริ่มจากจำนวนคี่บวกมีวิธีดำเนินการวิจัย ดังนี้

3.1 การให้เหตุผลเชิงอุปนัย

ผู้วิจัยดำเนินการสร้างสูตรทางคณิตศาสตร์เพื่อหาความสัมพันธ์ของตัวอย่างชุดจำนวนตามทฤษฎีบทปีทาโกรัสที่เริ่มจากจำนวนคี่บวก ซึ่งผู้วิจัยใช้การให้เหตุผลเชิงอุปนัย (Inductive Reasoning) ในการหาข้อสรุปเป็นข้อความคาดการณ์โดยการสังเกตชุดจำนวนตามทฤษฎีบทปีทาโกรัสได้แก่ (1) 3,4,5 (2) 5,12,13 (3) 7,24,25 (4) 9,40,41 (5) 11,60,61 (6) 13, 84, 85

3.2 การพิสูจน์ตามหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

กำหนดให้ $P(n)$ เป็นประโยคเปิด ดังนี้

$$P(n):\ n^2+\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{n^2-1}{2}+1\right)^2$$ โดยที่ n เป็นจำนวนคี่บวก และ $n>1$

การเขียนข้อความพิสูจน์ตามหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สำหรับข้อความ $\forall n\in N, P(n)$ จึงแบ่งขั้นตอนพิสูจน์ออกเป็นสองขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 พิสูจน์ว่าP(3) เป็นจริง

ขั้นที่ 2 พิสูจน์ว่าสำหรับจำนวนคี่ใดๆที่มากกว่า 1 ถ้า P(k) เป็นจริงแล้ว P(k+1) เป็นจริง

2.1 สำหรับจำนวนคี่ใดๆ ที่มากกว่า 1 ถ้า P(k) เป็นจริง

2.2 สำหรับจำนวนคี่ใดๆ ที่มากกว่า 1 แล้ว P(k+1) เป็นจริง

3.3 การตรวจสอบความสัมพันธ์

ผู้วิจัยตรวจความถูกต้องของข้อความคาดการณ์โดยการตรวจสอบคำตอบโดยใช้ความสัมพันธ์ $c^2= a^2+ b^2$ ซึ่งผู้วิจัยได้สุ่มเลือกชุดจำนวนตามทฤษฎีบทปีทาโกรัส (1) 13, 84 และ 85 (2)31, 480 และ 481 (3) 47, 1,104 และ 1,105 เป็นต้น

4. ผลการวิจัยและอภิปรายผล

4.1 การให้เหตุผลเชิงอุปนัย

จากทฤษฎีบทปีทาโกรัสสามารถเขียนเป็นสมการแสดงความสัมพันธ์ของความยาวของด้าน a, b และ c ได้ในรูปสมการ $c^2=a^2+b^2$ โดยที่ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก และ a และ b เป็นความยาวของด้านประกอบมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ผู้วิจัยดำเนินการสร้างสูตรทางคณิตศาสตร์เพื่อหาความสัมพันธ์ตัวอย่างชุดจำนวนตามทฤษฎีบทปีทาโกรัสที่เริ่มจากจำนวนคี่บวกโดยใช้การให้เหตุผลเชิงอุปนัย (Inductive Reasoning) ในการสรุปความรู้ใหม่ จากการสังเกตและทดลองหลายๆตัวอย่างจากกรณีย่อยๆแล้วสรุปเป็นความรู้แบบทั่วไปดังตารางที่ 1 ดังนี้

ตารางที่ 1 ความสัมพันธ์ของความยาวด้านทั้งสามด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ด้านประกอบมุมฉาก a	ด้านประกอบมุมฉาก b	ด้านตรงข้ามมุมฉาก c
3	$\left(\frac{3^2-1}{2}\right)=4$	$\left(\frac{3^2-1}{2}\right)+1=4+1=5$
5	$\left(\frac{5^2-1}{2}\right)=12$	$\left(\frac{5^2-1}{2}\right)+1=12+1=13$
7	$\left(\frac{7^2-1}{2}\right)=24$	$\left(\frac{7^2-1}{2}\right)+1=24+1=25$
9	$\left(\frac{9^2-1}{2}\right)=40$	$\left(\frac{9^2-1}{2}\right)+1=40+1=41$
11	$\left(\frac{11^2-1}{2}\right)=60$	$\left(\frac{11^2-1}{2}\right)+1=60+1=61$
13	$\left(\frac{13^2-1}{2}\right)=84$	$\left(\frac{13^2-1}{2}\right)+1=84+1=85$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n	$\left(\frac{n^2-1}{2}\right)$	$\left(\frac{n^2-1}{2}+1\right)$

จากตารางที่ 1 พบความสัมพันธ์จากสมการปีทาโกรัส $c^2=a^2+b^2$ โดยที่ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก และ a และ b เป็นความยาวของด้านประกอบมุมฉากพบความสัมพันธ์ทั้งสามด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก คือ ด้านประกอบมุมฉากทั้งสองด้าน ได้แก่ n และ $\left(\frac{n^2-1}{2}\right)$ ตามลำดับ โดยที่ n เป็นจำนวนคี่บวก และ $n>1$ และความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก คือ $\left(\frac{n^2-1}{2}+1\right)$ หรือ b+1 ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$n^2+\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{n^2-1}{2}+1\right)^2$ โดยที่ n เป็นจำนวนคี่บวก และ $n>1$

4.2 การพิสูจน์ตามหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

กำหนดให้ $P(n)$ เป็นประโยคเปิด ดังนี้ $n^2+\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{n^2-1}{2}+1\right)^2$ โดยที่ n เป็นจำนวนคี่บวก และ $n>1$

การพิสูจน์ตามหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สำหรับข้อความ $\forall n \in N, P(n)$ จึงแบ่งขั้นตอนพิสูจน์ออกเป็นสองขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 พิสูจน์ว่าP(3) เป็นจริง

จากความสัมพันธ์ $P(n): n^2+\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{n^2-1}{2}+1\right)^2$

กำหนดให้ n=3

จะได้
$$3^2+\left(\frac{3^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{3^2-1}{2}+1\right)^2$$
$$9+\left(\frac{9-1}{2}\right)^2=\left(\frac{9-1}{2}+1\right)^2$$
$$9+\left(\frac{8}{2}\right)^2=\left(\frac{8}{2}+1\right)^2$$
$$9+4^2=(4+1)^2$$
$$9+16=5^2$$
$$25=25$$, P(3) เป็นจริง

ดังนั้น จากความสัมพันธ์ $P(n): n^2+\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{n^2-1}{2}+1\right)^2$

เมื่อ กำหนดให้ n=3 จะได้ P(3) เป็นจริง ....(1)

ขั้นที่ 2 พิสูจน์ว่าสำหรับจำนวนคี่ใดๆที่มากกว่า 1ถ้า P(k) เป็นจริงแล้ว P(k+1) เป็นจริง

2.1 สำหรับจำนวนคี่ใดๆที่มากกว่า 1 ถ้า P(k) เป็นจริง

จากความสัมพันธ์ $P(n): n^2+\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{n^2-1}{2}+1\right)^2$

กำหนดให้ n=k

จะได้
$$k^2+\left(\frac{k^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{k^2-1}{2}+1\right)^2$$

$$k^2+\frac{\left(k^2-1\right)^2}{4}=\left(\frac{k^2-1}{2}+\frac{2}{2}\right)^2$$

$$\frac{4k^2}{4}+\frac{\left(k^2-1\right)^2}{4}=\left(\frac{k^2-1+2}{2}\right)^2$$

$$\frac{4k^2}{4}+\frac{k^4-2k^2+1}{4}=\left(\frac{k^2+1}{2}\right)^2$$

$$\frac{4k^2+k^4-2k^2+1}{4}=\frac{\left(k^2+1\right)^2}{4}$$

$$\frac{k^4+2k^2+1}{4}=\frac{k^4+2k^2+1}{4}$$, P(k) เป็นจริง

ดังนั้น จากความสัมพันธ์ $P(n): n^2+\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{n^2-1}{2}+1\right)^2$

เมื่อ กำหนดให้ n=k จะได้ P(k) เป็นจริง ....(2)

2.2 สำหรับจำนวนคี่ใดๆที่มากกว่า 1แล้ว P(k+1) เป็นจริง

จากความสัมพันธ์ $P(n): n^2+\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{n^2-1}{2}+1\right)^2$

กำหนดให้ n=k+1

จะได้

$$(k+1)^2+\left(\frac{(k+1)^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{(k+1)^2-1}{2}+1\right)^2$$

$$\left(k^2+2k+1\right)+\left(\frac{\left(k^2+2k+1\right)-1}{2}\right)^2=\left(\frac{\left(k^2+2k+1\right)-1}{2}+1\right)^2$$

$$\left(k^2+2k+1\right)+\left(\frac{k^2+2k}{2}\right)^2=\left(\frac{k^2+2k}{2}+1\right)^2$$

$$\left(k^2+2k+1\right)+\frac{k^4+4k^3+4k^2}{4}=\left(\frac{k^2+2k}{2}+\frac{2}{2}\right)^2$$

$$\frac{4}{4}\left(k^2+2k+1\right)+\frac{k^4+4k^3+4k^2}{4}=\left(\frac{k^2+2k+2}{2}\right)^2$$

$$\frac{4k^2+8k+4}{4}+\frac{k^4+4k^3+4k^2}{4}=\frac{\left(k^2+2k+2\right)^2}{4}$$

$$\frac{k^4+4k^3+8k^2+8k+4}{4}=\frac{k^4+2k^3+2k^2+2k^3+4k^2+4k+2k^2+4k+4}{4}$$

$$\frac{k^4+4k^3+8k^2+8k+4}{4}=\frac{k^4+4k^3+8k^2+8k+4}{4}$$, P(k+1) เป็นจริง

ดังนั้น จากความสัมพันธ์ $P(n): n^2+\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{n^2-1}{2}+1\right)^2$

เมื่อ กำหนดให้ n=k+1จะได้ P(k+1) เป็นจริง ....(3)

สรุป จาก(1), (2) และ (3) เมื่อกำหนด $P(n)$ คือ $n^2+\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{n^2-1}{2}+1\right)^2$ โดยที่ n เป็นจำนวนคี่บวก และ $n>1$ จะได้ P(3) เป็นจริงและสำหรับจำนวนคี่ใดๆที่มากกว่า 1 ถ้า P(k) เป็นจริงแล้ว P(k+1) เป็นจริง

4.3 การตรวจสอบความสัมพันธ์

จากภาพที่ 1 ความสัมพันธ์ของความยาวด้านทั้งสามด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มีความสัมพันธ์ดังนี้ a=**n, b=**$\left(\frac{n^2-1}{2}\right)$, **c=**$\left(\frac{n^2-1}{2}+1\right)$ **หรือ c=b+1**โดยที่ a, b คือความยาวด้านประกอบมุมฉาก และ c คือความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก จะได้ความสัมพันธ์ $n^2+\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{n^2-1}{2}+1\right)^2$ โดยที่ n เป็นจำนวนคี่บวก และ $n>1$

ตารางที่ 2 ความสัมพันธ์ของความยาวด้านทั้งสามด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยใช้ตัวอย่างชุดจำนวนตามทฤษฎีบทปีทาโกรัสที่เริ่มจากจำนวนคี่บวก

ด้านประกอบมุมฉาก		ด้านตรงข้ามมุมฉาก(c)
ด้านแรก (a)ยาวน้อยสุด	**ด้านที่สอง (b)**	
3	$(3^2-1)/2=8/2=4$	4+1=5
5	$(5^2-1)/2=24/2=12$	12+1=13
7	$(7^2-1)/2=48/2=24$	24+1=25
9	$(9^2-1)/2=80/2=40$	40+1=41
11	$(11^2-1)/2=120/2=60$	60+1=61
13	$(13^2-1)/2=168/2=84$	4+1=85
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n	$\left(\frac{n^2-1}{2}\right)$	b+1

ผู้วิจัยตรวจความถูกต้องของข้อความคาดการณ์โดยการตรวจสอบคำตอบโดยใช้ความสัมพันธ์ $c^2 = a^2 + b^2$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 ชุดจำนวนตามทฤษฎีบทปีทาโกรัส 13, 84 และ 85

จะได้ $85^2=13^2+84^2$

$7,225= 169+7,056$

$7,225= 7,225$

ดังนั้น ชุดจำนวนตามทฤษฎีบทปีทาโกรัส 13, 84 และ 85 เป็นจริง

ตัวอย่างที่ 2 ชุดจำนวนตามทฤษฎีบทปีทาโกรัส31, 480 และ 481

จะได้ $481^2=31^2+480^2$

$231,361= 961+230,400$

$231,361= 231,361$

ดังนั้น ชุดจำนวนตามทฤษฎีบทปีทาโกรัส31, 480 และ 481 เป็นจริง

ตัวอย่างที่ 3 ชุดจำนวนตามทฤษฎีบทปีทาโกรัส47, 1,104 และ 1,105

จะได้ $1,105^2=47^2+1,104^2$

$1,221,025= 2,209+1,218,861$

$1,221,025= 1,221,025$

ดังนั้น ชุดจำนวนตามทฤษฎีบทปีทาโกรัส47, 1,104 และ 1,105 เป็นจริง

อภิปรายผล

การศึกษาและการหาแบบรูปทั่วไปในการหาตัวอย่างชุดจำนวนตามทฤษฎีบทปีทาโกรัสที่เริ่มจากจำนวนคี่บวกเพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยพิสูจน์ตามหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ได้แก่ ขั้นที่ 1 พิสูจน์ว่า P(3) เป็นจริง และขั้นที่ 2 พิสูจน์ว่าสำหรับจำนวนคี่ใดๆที่มากกว่า 1 ถ้า P(k) เป็นจริงแล้ว P(k+1) เป็นจริงรวมทั้งตรวจสอบความสัมพันธ์ของข้อความ P(n)

จากการศึกษาพบความสัมพันธ์ คือ **a=n, b=**$\left(\frac{n^2-1}{2}\right)$**, c=**$\left(\frac{n^2-1}{2}+1\right)$ **หรือ c=b+1** จะได้

ความสัมพันธ์ $n^2+\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{n^2-1}{2}+1\right)^2$ หรือ $n^2+\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2=(b+1)^2$ โดยที่ n เป็นจำนวนคี่บวก และ $n>1$ซึ่ง a, b คือ ความยาวด้านประกอบมุมฉาก และ c คือ ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก

จากการพิสูจน์ข้อความพบว่า เมื่อกำหนดให้ n=3 จะได้ P(3) เป็นจริงเมื่อกำหนดให้ n=k จะได้ P(k) เป็นจริงและเมื่อกำหนดให้ n=k+1 จะได้ P(k+1) เป็นจริง ดังนั้นการนำความสัมพันธ์ $n^2+\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{n^2-1}{2}+1\right)^2$ หรือ $n^2+\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2=(b+1)^2$ สามารถนำวิธีการนี้ไปใช้สร้างตัวอย่างชุดจำนวนตามทฤษฎีบทปีทาโกรัสที่เริ่มจากจำนวนคี่บวก ซึ่งดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. เลือกจำนวนคี่บวกที่มากกว่า 1 โดยกำหนดให้เป็นความยาวของด้านที่สั้นที่สุดของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

2. นำความยาวที่เลือกไว้ในข้อ 1 ไปยกกำลังสองแล้วลบด้วยหนึ่ง หลังจากนั้นให้หารด้วยสอง จากการดำเนินการดังกล่าวจะได้ความยาวของด้านที่สองของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

3. นำความยาวที่ได้จากข้อ 2 ไปบวกด้วยหนึ่ง จะได้ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

สำหรับวิธีการหาตัวอย่างชุดจำนวนตามทฤษฎีบทปีทาโกรัสที่เริ่มจากจำนวนคี่บวก เมื่อนำไปประยุกต์ใช้หาตัวอย่างชุดจำนวนปีทาโกรัสโดยจำนวนแรกจะต้องเป็นจำนวนคี่บวก n โดยที่ $n \in \{3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots\}$ และนำไปใช้หาความยาวของด้านประกอบมุมฉาก และด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีความยาวด้านเป็นจำนวนเต็มเท่านั้น ได้แก่ (1) 3,4,5 (2) 5,12,13 (3) 7,24,25 (4) 9,40,41 (5) 11,60,61 (6) 13, 84, 85 เป็นต้น

5. ข้อเสนอแนะ

1. สำหรับการนำตัวอย่างชุดจำนวนตามทฤษฎีบทปีทาโกรัสที่เริ่มจากจำนวนคี่บวก ไปประยุกต์ใช้หาชุดจำนวนปีทาโกรัสโดยจำนวนแรกจะต้องเป็นจำนวนคี่ตั้งแต่ 3 เป็นต้นไป

2. สำหรับการหาตัวอย่างชุดจำนวนตามทฤษฎีบทปีทาโกรัสที่เริ่มจากจำนวนคี่บวก ไม่สามารถใช้กับจำนวนตรรกยะ และจำนวนอตรรกยะได้

6. กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณผู้ทรงคุณวุฒิ ผู้เชี่ยวชาญและผู้ประเมินบทความวิชาการทุกท่าน ที่ให้แนวคิด คำแนะนำ และข้อเสนอแนะในการทำวิจัยครั้งนี้ให้สำเร็จลุล่วงได้อย่างสมบูรณ์ และขอขอบคุณคณาจารย์ในสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ตที่ให้การสนับสนุน คำปรึกษา วัสดุและอุปกรณ์ และสถานที่ในการดำเนินการวิจัย

7. บรรณานุกรม

เกษมสันต์ รุทธิ์อมร. (2557). **การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์**. ธนบุรี: มหาวิทยาลัยราชภัฏธนบุรี.

ธีรวัฒน์ นาคะบุตร. (2546). **ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์**. นครปฐม: สถาบันราชภัฏนครปฐม.

พัฒนี อุดมกะวานิช. (2556). **หลักคณิตศาสตร์**. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

วิจิตรา อุปการนิติเกษตร. (2556). **ตรรกศาสตร์เบื้องต้นและวิธีการพิสูจน์**. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง.

วัชรพงษ์ อนรรฆเมธี. (2558). **เอกสารประกอบการสอนหลักคณิตศาสตร์**. พิษณุโลก: คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร.

ประวัติผู้วิจัย

1. ประวัติส่วนตัว

ชื่อ-นามสกุล	นายอนุวัตร จิรวัฒนพาณิช
ตำแหน่งปัจจุบัน	อาจารย์
วัน เดือน ปี เกิด	10 มิ.ย. 2525
ที่อยู่ปัจจุบัน	80/89 ม.3 ถ.ตรังต.รัษฎา อ.เมือง จ.ภูเก็ต 83120
เบอร์โทรศัพท์	-
เบอร์โทรสาร	-
เบอร์โทรศัพท์มือถือ	086-2727610

2. ประวัติการศึกษา

ปี พ.ศ.ที่จบ	วุฒิการศึกษา	สาขาวิชา	สถาบันที่จบ
2553	ศษ.ม.	คณิตศาสตร์ศึกษา	มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
2548	ค.บ.	คณิตศาสตร์	มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต

3. ประวัติการทำงาน

ช่วงปี พ.ศ.	ตำแหน่ง	หน่วยงาน
2555	อาจารย์	คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต

4. ผลงานด้านการวิจัยทั้งภายในและภายนอกประเทศ

งานวิจัยที่ทำเสร็จแล้ว

1. การสร้างแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์สำหรับวิศวกรรมลู่กรีฑา
2. ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคอีสุกอีใสโดยการรณรงค์ให้ความรู้
3. ความสามารถในการคิดอเนกนัยจากการจัดการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาปลายเปิด

งานวิจัยที่กำลังดำเนินการ

1. ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการรณรงค์ป้องกันการแพร่ระบาดของโรคตาแดง