การประชุมวิชาการระดับชาติและนานาชาติ ครั้งที่ 4 พ.ศ. 2564

The 4th National and International Research Conference 2021

NIRC IV 2021

การศึกษาอัตราการสวมถุงยางอนามัยที่มีผลต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโรคหนองในแท้ ในจังหวัดภูเก็ต

The Study of Condoms Wearing Rates on mathematical Models of Gonorrhea in Phuket

นนต์ธิยา รอดสกุล[1] อนุรักษ์ วีระประเสริฐสกุล[2]
[1]นักศึกษาสาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต
Rodsakun2@gmail.om
[2]อาจารย์สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต
anurak.w@pkru.ac.th

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาและวิเคราะห์ความเสถียรภาพของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการศึกษาอัตราการสวมถุงยางอนามัยที่มีผลต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโรคหนองในแท้ ในจังหวัดภูเก็ต วิเคราะห์ตัวแบบโดยใช้วิธีมาตรฐาน ศึกษาจุดสมดุล ศึกษาเสถียรภาพของจุดสมดุล หาคำตอบเชิงวิเคราะห์ ศึกษาประสิทธิภาพของอัตราการสวมถุงยางอนามัย (ε) ในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์และหาคำตอบเชิงตัวเลข

ผลการวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์พบว่า ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรคของอัตราการสวมถุงยางอนามัย $(\varepsilon = 0.999)$ มีค่าระดับการติดเชื้อ $(R_0 = 0.15437429)$ และประสิทธิภาพของอัตราการสวมถุงยางอนามัย $(\varepsilon = 0.99)$ มีค่าระดับการติดเชื้อ $(R_0 = 1.543742903)$ และประสิทธิภาพของอัตราการสวมถุงยางอนามัยเป็นปัจจัยที่มีผลต่อตัวแบบเชิงทางคณิตศาสตร์ ถ้าประชากรเสี่ยงต่อการติดเชื้อมีความรู้เกี่ยวกับการสวมถุงยางอนามัยและมีการป้องการเพิ่มขึ้นการแพร่กระจายของโรคหนองใน ลดลงจนไม่มีการแพร่ระบาด

คำสำคัญ : ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์, การสวมถุงยางอนามัย, โรคหนองในแท้

Abstract

The objective of this research is to study and analyze the stability of The Study of condoms wearing rates on mathematical models of gonorrhea in Phuket. The model is analyzed by standard methods, the Equilibrium Point, stability of the Equilibrium Points, analytic solution, effectiveness of condoms wearing rates on mathematical models of gonorrhea (ε) and numerical solutions.

The research results found that the stability of effectiveness point when the is the effectiveness of condoms wearing rates $(\varepsilon = 0.999)$ have basic reproductive number$(R_0 = 0.15437429)$, and the of effectiveness of condoms wearing rates $(\varepsilon = 0.99)$, the disease endemic equilibrium ($R_0 = 1.543742903$). The effectiveness of condoms wearing rates is the factor affects to the mathematical modeling. If the risk of infection's population has condoms wearing rates and follow hypothesis increase then the spread of gonorrhea. Decreased until no epidemic.

Keywords : Mathematical Model, Condoms Wearing, Gonorrhoea

1. บทนำ

คณิตศาสตร์ได้เข้ามามีบทบาทเกี่ยวข้องในการดำรงชีวิตสามารถนำมาประยุกต์ใช้ได้หลากหลาย โดยเฉพาะทางการแพทย์สามารถนำมาจำลองการเกิดโรคและการแพร่ระบาดของโรคได้อย่างรวดเร็วส่งผลต่อสุขภาพซึ่งปัจจุบันมีการเปลี่ยนแปลงของสภาพภูมิอากาศและสิ่งแวดล้อมเป็นสาเหตุหนึ่งที่ทำให้เกิดการแพร่ระบาดของโรคอีกทั้งคณิตศาสตร์ยังสามารถนำมาเป็นเครื่องมือช่วยทำความเข้าใจเกี่ยวกับสุขภาพ เช่น การทดสอบปริมาณยา เป็นต้น

จากการศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์แสดงให้เห็นถึงบทบาทและประโยชน์ของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่มีส่วนช่วยในการแก้วิกฤตการณ์ที่กำลังเกิดขึ้นจากโรคภัยต่างๆ โดยการจำลองประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ตัวเชื้อโรค ตัวพาหะนำโรค และผู้ติดเชื้อ โดยแปลงข้อมูลให้อยู่ในรูปสมการทางคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายถึงการแพร่ระบาดและการแพร่ระบาดของโรค โดยผู้วิจัยไม่จำเป็นต้องไปศึกษากับมนุษย์โดยตรงซึ่งอาจเกิดอันตรายต่อชีวิตของผู้วิจัยและผู้ป่วยอีกทั้งยังช่วยลดงบประมาณสำหรับมาตรการป้องกันและการรักษาโรคตามความต้องการที่แท้จริงอย่างเหมาะสมและรวดเร็วมากที่สุด (ศันสนีย์ เณรเทียน,2560)

โรคหนองในเป็นโรคติดต่อทางเพศสัมพันธ์เกิดจากเชื้อแบคทีเรียชนิดหนึ่ง ชื่อว่า (Neisseria gonorrhoeae) โดยเชื้อแบคทีเรียนี้เป็นเชื้อดื้อยา เรียกว่า ซุปเปอร์บั๊ก (Superbug) ทำให้การรักษาโรคหนองในแท้นั้นยากขึ้นโรคหนองในแท้ติดต่อผ่านทางการมีเพศสัมพันธ์ที่ไม่ได้ป้อง(ชยากร พงษ์พยัคเลิศ (นพ.), voicetv,2559) กันซึ่งพบได้ประมาณ 40 - 50% ของโรคติดต่อทางเพศสัมพันธ์ โดยองค์การอนามัยโลก WHO ประเมินว่า ในแต่ละปีมีประชากรกว่า 78 ล้านคนทั่วโลกที่ติดเชื้อหนองในซึ่งส่วนมากจะพบมากที่สุดในกลุ่มอายุ 15-24 (นายแพทย์อัษฎางค์ , 2562)

ในปัจจุบันสถานการณ์โรคติดต่อทางเพศสัมพันธ์มีแนวโน้มเพิ่มสูงขึ้นในประเทศไทย กรมควบคุมโรค รายงานว่าโรคหนองในเป็นโรคติดต่อทางเพศสัมพันธ์ที่มีประชากรติดต่อกันมากที่สุด คือ มีอัตราผู้ป่วยสูงถึง15.8 คนต่อประชากรแสนคนโรคหนองในจะแพร่เชื้อได้ทั้งชายและหญิง และอาจมีภาวะโรคแทรกซ้อน เช่น โรคซิฟิลิส, HIV, โรคหนองในเทียม ในบางรายทำให้เกิดภาวะมีบุตรยากในเพศหญิงและชาย การติดเชื้อบริเวณข้อต่อซึ่งอาจทำให้มีอาการเจ็บผิวหนัง ปวดข้อต่อ เป็นไข้ ผื่นขึ้น บวม และรู้สึกเมื่อยตามมา โรคหนองในจะส่งผลให้ผู้ป่วยไวต่อการติดเชื้อเอชไอวีซึ่งเป็นไวรัสที่ส่งผลให้นำไปสู่โรคเอดส์ และในกรณีหญิงมีครรภ์ติดเชื้ออาจทำให้เวลาทารกแรกคลอดติดเชื้อเกิดอาการตาอักเสบส่งผลต่อการมองเห็นของทารกจนทำให้ตาบอดและเกิดการติดเชื้อรุนแรงที่อวัยวะอื่นๆเป็นอันตรายต่อชีวิตของทารกได้ (สำนักระบาดวิทยากรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุข โรงพยาบาลเปาโล พหลโยธิน)

ในจังหวัดภูเก็ตมีผู้ติดเชื้อโรคหนองในแท้ตั้งแต่ปี 2558 ถึง 2562 มีจำนวนผู้ป่วยในจากปี2558 จำนวน 88 คน ซึ่งเพิ่มขึ้นจำนวน 34 คนในปี 2559 จำนวน122 คน ในปี 2560 มีจำนวน 91 คน ในปี 2561

มีจำนวน 99 คน และในปี2562 มีจำนวนผู้ป่วยเพิ่มขึ้นจาก ปี2558 รวมเป็น 138 คน ทำให้คนในจังหวัดภูเก็ตมีแนวโน้มของโรคหนองในแท้เพิ่มขึ้นสูงเนื่องจากขาดความรู้การป้องกันตนเองเกี่ยวกับการสวมถุงยางอนามัย (กรสาธารณสุขจังหวัดภูเก็ต)

จากเหตุข้างต้น ผู้วิจัยได้ตระหนักและเห็นประโยชน์ที่ได้รับจึงดำเนินการทำการศึกษาอัตราการป้องกันโดยการสวมถุงยางอนามัยที่มีผลต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ สำหรับการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคหนองในแท้ข้อมูลของผู้ป่วยที่ได้รวบรวมจากกระทรวงสาธารณสุขในปี พ.ศ. 2562 พร้อมทั้งสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการแพร่ระบาดของโรคนองในแท้ที่มีผลตจากอัตราการสวมถุงยางอนามัย ซึ่งสามารถนำผลที่ได้ไปใช้เป็นข้อมูลเบื้องต้นในการป้องกันเผื่อ ลดจำนวนผู้ป่วยและใช้เป็นข้อมูลทางวิชาการควบคู่กับสถิติการเกิดโรคของประเทศไทยทั่วภูมิภาค ที่เฝ้าระวังและทางสำนักระบาดวิทยา กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุขต่อไป

2. วัตถุประสงค์การวิจัย

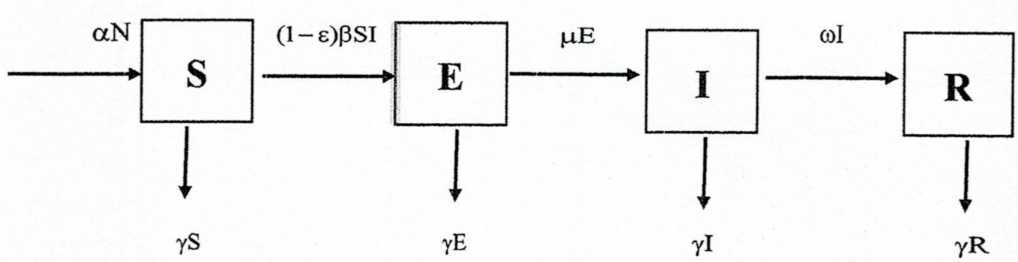
2.1. เพื่อพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการแพร่ระบาดของโรคหนองในแท้โดยการศึกษาอัตราการสวมถุงยางอนามัยที่มีผลต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

2.2. เพื่อวิเคราะห์เสถียรภาพของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคหนองในแท้โดยการศึกษาอัตราการสวมถุงยางอนามัยที่มีผลตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

3. วิธีการดำเนินการวิจัย

การศึกษาวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการแพร่ระบาดของโรคหนองในแท้ที่สอดคล้องกับกลุ่มประชากร และลักษณะของการเกิดโรค ซึ่งมีการดำเนินการวิจัย 3 ขั้นตอนดังนี้

3.1. การพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยได้ศึกษาแผนภาพแสดงความสัมพันธ์ขององค์ประกอบในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ และได้พัฒนาตัวแบบสำหรับการศึกษาการสวมถุงยางอนามัยที่มีผลต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1 ความสัมพันธ์และองค์ประกอบของการศึกษาอัตราการสวมถุงยางอนามัยที่มีผลต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโรคหนองในแท้

โดยที่ S เป็นจำนวนคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ, E เป็นจำนวนคนที่ติดเชื้อแต่ไม่แสดงอาการ, I เป็นจำนวนคนที่ติด,R เป็นจำนวนคนที่หายป่วยจากโรค, α เป็นอัตราการเกิดของประชากร, γ เป็นอัตราการตาย

โดยธรรมชาติ, β เป็นอัตราการสัมผัสเชื้อ, μ เป็นอัตราการฟักตัวของเชื้อ, ω เป็นอัตราการหายจากโรค, ε เป็นอัตราการสวมถุงยางอนามัย และ N เป็นจำนวนประชากรทั้งหมด ซึ่งในการศึกษาครั้งนี้ครั้งนี้ได้กำนดให้จำนวนประชากรมนุษย์คงที่

จากรูปที่ 1 ผู้วิจัยได้ดำเนินการส่งให้ผู้เชี่ยวที่เกี่ยวข้อง ได้แก่ ผู้ทรงคุณวุฒิทางคณิตศาสตร์ได้แก่ ดร.บัณฑิต อันยงค์(ผู้เชี่ยวชาญทางด้านคณิตศาสตร์) และบุคลากรทางการแพทย์ ได้แก่ นายนพดล แก้วมหินธ์(หัวหน้าฝ่ายสาธารณสุขและความปลอดภัยเทศบาล) ช่วยตรวจสอบแผนภาพและระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้นเมื่อผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบและให้ข้อเสนอแนะ ผู้วิจัยได้ทำการแก้ไขปรับปรุงตามคำแนะนำแล้วนำตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ได้มาวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐาน ซึ่งจากรูปที่ 1 ได้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น ดังนี้

$$\frac{ds}{dt} = \alpha N - (1-\varepsilon)\beta SI - \gamma S \tag{1}$$

$$\frac{dE}{dt} = (1-\varepsilon)\beta SI - \mu E - \gamma E \tag{2}$$

$$\frac{dI}{dt} = \mu E - \omega I - \gamma I \tag{3}$$

$$\frac{dR}{dt} = \omega I - \gamma R \tag{4}$$

โดยที่ $N = S + E + I + R$ จากสมการ (1)-(4) จะได้เซตของตัวแปร S, E, I, R เพื่อช่วยในการหาจุดสมดุล (Equilibrium point)

3.2 การหาจุดสมดุล (Equilibrium point) หาได้จากสมการที่ (1)-(4) ของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ โดยที่ $N = S + E + I + R$ เมื่อกำหนดให้จำนวนประชากรทั้งหมดเป็นค่าคงที่ นั่นคือ $\frac{dN}{dt} = 0$ จะได้ $\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dE}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt}$ เมื่อกำหนด $\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dE}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0, \frac{dR}{dt} = 0$ จากสมการ (1)-(4)

จะได้
$$S = \frac{\alpha N}{(1-\varepsilon)\beta I + \gamma} \tag{5}$$

$$E = \frac{(1-\varepsilon)\beta NSI}{\mu + \gamma} \tag{6}$$

$$I = \frac{\mu E}{(\omega + \gamma)} \tag{7}$$

$$R = \frac{\omega I}{\gamma} \tag{8}$$

จะได้ความเสถียรภาพของจุดสมดุลสามารถพิจารณาจากค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมตริกซ์จากสมการอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น จาก (1)-(4) สามารถดำเนินการแปลงเป็นจาโคเบียนเมตริกซ์จากความสัมพันธ์ $\frac{dN}{dt} = F(X)$ โดยที่ $J = \left[\frac{\partial F_i}{\partial X_i}\right]$ เมื่อกำหนด $X = (S, E, I, R)$ และพิจารณาค่าลักษณะเฉพาะได้จาก $\det(J - \lambda I_4) = 0$ เมื่อ I_4 คือเมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 4×4 ได้ดังนี้

$$J = \begin{bmatrix} -(1-\varepsilon)\beta I - \gamma & 0 & -(1-\varepsilon)\beta S & 0 \\ (1-\varepsilon)\beta I & -\mu-\gamma & (1-\varepsilon)\beta S & 0 \\ 0 & \mu & -\omega-\gamma & 0 \\ 0 & 0 & \omega & -\gamma \end{bmatrix}$$

3.4.1 จุดสมดุลที่ไม่มีโรค (Local asymptotically stable ณ จุด E_0) กำหนดให้ $E = 0$ ในสมการที่ (6) จะได้ $I = 0$ และแทน $I = 0$ ในสมการ(5) จะได้ $S = N$ ดังนั้น $E_0(S, E, I, R) = E_0(N, 0, 0, 0)$ เสถียรของระบบ (Stability of Systems) ที่จุด E_0 โดยจะดำเนินการหาสมการลักษณะเฉพาะ $\det(J - \lambda I_4) = 0$ เพื่อหาค่า λ เมื่อ λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen Values) และ I เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 4×4 โดยมีข้อกำหนดว่า λ ทุกค่าส่วนจริงต้องเป็นลบซึ่งจะสอดคล้องตามเงื่อนไข Roth-Hurwitz จึงส่งผลให้ค่า $R_0 < 1$ ดังนี้

$$J_0 = \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & -(1-\varepsilon)\beta S & 0 \\ 0 & -\mu-\gamma & (1-\varepsilon)\beta S & 0 \\ 0 & \mu & -\omega-\gamma & 0 \\ 0 & 0 & \omega & -\gamma \end{bmatrix}, \quad J_0 - \lambda I = \begin{bmatrix} -\gamma-\lambda & 0 & -(1-\varepsilon)\beta S & 0 \\ 0 & -\mu-\gamma-\lambda & (1-\varepsilon)\beta S & 0 \\ 0 & \mu & -\omega-\gamma-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \omega & -\gamma-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(J_0 - \lambda I) = \begin{bmatrix} -\gamma-\lambda & 0 & -(1-\varepsilon)\beta S \\ 0 & -\mu-\gamma-\lambda & (1-\varepsilon)\beta S \\ 0 & \mu & -\omega-\gamma-\lambda \end{bmatrix}$$

จะได้ $\lambda_1 = -\gamma, \lambda_2 = -\gamma, \lambda_3 = -(\mu + \gamma)$ และ $\lambda_4 = -(\omega + \gamma)$

โดย $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ และ λ_4จะมีค่าเป็นลบ เมื่อพิจารณาความเสถียรภาพของระบบ ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรค จะพบว่าค่าลักาณะเฉพาะ $\lambda_1 = -0.0000177, \lambda_2 = -0.0000177, \lambda_3 = -0.0017841$ และ $\lambda_4 = -0.0648273$ ซึ่งทุกค่ามีส่วนจริงปีนค่าลบและสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Roth-Hurwitz ส่งผลให้คำตอบจะลู่เข้าสู่จุดสมดุล $E_0 = (416582,0,0,0)$ดังนั้น จุดสมดุลไม่มีโรค E_0 จะเป็น Local asymptotically

3.4.2 จุดสมดุลที่มีโรค (Local asymptotically stable ณ จุด E_1) กำหนด $E \neq 0$และ $E > 0$ พิจารณา $E_1(S^*, E^*, I^*, R^*)$ซึ่งจะหาได้จากสมการที่ (5)-(8) จะได้ดังนี้

$$E_1\left(S^*,E^*,I^*,R^*\right)=\left(\frac{\alpha N}{(1-\varepsilon)\beta I+\gamma},\frac{\alpha}{(\mu+\gamma)}-\frac{\gamma(\omega+\gamma)}{(\mu+\gamma)(1-\varepsilon)\beta N\mu},\frac{\alpha\mu}{(\omega+\gamma)(\mu+\gamma)}-\frac{\gamma}{(\mu+\gamma)(1-\varepsilon)\beta N},\frac{\omega I}{\gamma}\right)$$

ดังนั้น สมการลักษณะที่จุด $E_1(S^*, E^*, I^*, R^*)$โดยให้ $\det(J_1 - \lambda I) = 0$เพื่อหาค่า λ เมื่อ λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen Values) และ I เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 4×4 กำหนด $E \neq 0$และ $E > 0$ พิจารณา จุดสมดุลที่มีโรคโดยการตรวจสอบค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมตริกซ์ ณ สภาวะที่มีการแพร่เชื้อของโรค $E_1 = \overline{S}^*, \overline{E}^*, \overline{I}^*, \overline{R}*$ ซึ่งได้จากสมการลักษณะเฉพาะจาก$\det(J_1 - \lambda I) = 0, J_1$ คือจาโคเบียนเมตริกซ์ ณ จุด E_1 โดยมีข้อกำหนดว่า λ ทุกค่าส่วนจริงต้องเป็นลบซึ่งจะสอดคล้องตามเงื่อนไข Roth-Hurwitz จึงส่งผลให้ค่า $R_0 > 1$ ดังนี้

$$J_1=\begin{bmatrix}-(1-\varepsilon)\beta I-\gamma & 0 & -(1-\varepsilon)\beta S & 0\\ (1-\varepsilon)\beta I & -\mu-\gamma & (1-\varepsilon)\beta S & 0\\ 0 & \mu & -\omega-\gamma & 0\\ 0 & 0 & \omega & -\gamma\end{bmatrix}$$

$$J_1-\lambda I=\begin{bmatrix}-(1-\varepsilon)\beta I^*-\gamma-\lambda & 0 & -(1-\varepsilon)\beta S^* & 0\\ (1-\varepsilon)\beta I^* & -\mu-\gamma-\lambda & (1-\varepsilon)\beta S^* & 0\\ 0 & \mu & -\omega-\gamma-\lambda & 0\\ 0 & 0 & \omega & -\gamma-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\det(J_1-\lambda I)=(-\gamma-\lambda)\begin{bmatrix}-(1-\varepsilon)\beta I^*-\gamma-\lambda & 0 & -(1-\varepsilon)\beta S^*\\ (1-\varepsilon)\beta I^* & -\mu-\gamma-\lambda & (1-\varepsilon)\beta S^*\\ 0 & \mu & -\omega-\gamma-\lambda\end{bmatrix}$$

การหาค่าลักษณะเฉพาะ โดยกำหนด $\det(J_1 - \lambda I) = 0$ โดยมีการจัดรูปให้อยู่ในรูป ดังนี้ $\lambda^4 + c_1\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_3\lambda + c_4 = 0$ เมื่อ $c_1 = (3\gamma + (1-\varepsilon)\beta I^* + \mu + \omega)$

$$c_2 = \begin{pmatrix} 3\gamma + (1-\varepsilon)\beta I^* + 6\gamma^2 + 3\mu\gamma + \omega + (1-\varepsilon)\beta\mu I^* \\ +(1-\varepsilon)\beta\omega I^* + 2\gamma\omega + \mu\omega + \gamma \end{pmatrix}$$

$$c_3 = \begin{pmatrix} 2(1-\varepsilon)\beta\gamma\mu I^* + 3(1-\varepsilon)\beta\gamma^2 I^* + 2(1-\varepsilon)\beta\gamma\omega I^* + 3\gamma^2\mu + 4\gamma^3 \\ +3\gamma^2\omega + 2\gamma\mu\omega + (1-\varepsilon)\beta\gamma\mu S^* + (1-\varepsilon)\beta\omega I^* + (1-\varepsilon)\beta\mu\omega I^* \end{pmatrix}$$

$$c_4 = \begin{pmatrix} (1-\varepsilon)\beta\gamma\mu\omega I^* + (1-\varepsilon)\beta\mu\gamma^2 I^* + (1-\varepsilon)\beta\gamma^2\omega I^* + (1-\varepsilon)\beta\gamma^3\omega I^* \\ +\gamma^2\mu\omega + \gamma^3\mu + \gamma^3\omega + \gamma^4 - (1-\varepsilon)\beta\mu\gamma^2 S^* \end{pmatrix}$$

ดังนั้น λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen Values) โดยหาได้จากสมการลักษณะจากสมการ $\lambda^4 + c_1\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_3\lambda + c_4 = 0$ จะได้ว่า $c_1c_2 > c_3$ นั่นคือสมการ $\lambda^4 + c_1\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_3\lambda + c_4 = 0$ สอดคล้องกับเงื่อนไขของ Roth-Hurwitz และเมื่อพิจารณาความเสถียรภาพของระบบ ณ จุดสมดุลที่มีโรค จะพบว่าลักษณะเฉพาะทุกค่ามีส่วนจริงเป็นค่าลบและสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Roth-Hurwitz ส่งผลให้คำตอบลู่เข้าสู่จุด ดังนั้น จุดสมดุลที่มีโรค E_1 จะเป็น Local asymptotically

3.4.3 การหาค่าระดับการติดเชื้อ (Basic Reproductive Number: R_0)

การหาค่าระดับการติดเชื้อหาค่า $P(FV^{-1})$ โดยวิธีการ Next Generation Method ซึ่งได้สมการ (1)-(4) จะได้เมตริกซ์อยู่ในรูป $\frac{dX}{dt} = F(X) - V(X)$ เพื่อหาค่า R_0 จากเมตริกซ์ $P(FV^{-1})$ ซึ่ง $F(X)$ และ $V(X)$ ได้จากอนุพันธ์ย่อย (Partial derivative) ดังนี้

$$X = \begin{bmatrix} S \\ E \\ I \\ R \end{bmatrix}, F\left[\frac{\partial F_i(E_0)}{\partial X_i}\right] \quad \text{และ} \quad V\left[\frac{\partial V_i(E_0)}{\partial X_i}\right]$$

เมื่อ $F(X)$ คือ เมตริกซ์ผู้ป่วยที่เพิ่มขึ้น และ $V(X)$ คือ เมตริกซ์ของผู้ป่วยที่เปลี่ยนสถานะจากกลุ่มหนึ่งไปอีกกลุ่มหนึ่งโดยการพิจารณาค่าระดับการติดเชื้อ R_0 ดังนี้

$$F(X) = \begin{bmatrix} 0 \\ (1-\varepsilon)\beta SI \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V(X) = \begin{bmatrix} -\alpha N + (1-\varepsilon)\beta SI + \gamma S \\ \mu E + \gamma E \\ -\mu E + \omega I + \gamma I \\ -\omega I + \gamma R \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $F=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\(1-\varepsilon)\beta I&0&(1-\varepsilon)\beta S&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$, $F(E_0)=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&(1-\varepsilon)\beta S&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

$$V=\begin{bmatrix}(1-\varepsilon)\beta I+\gamma&0&(1-\varepsilon)\beta S&0\\0&\mu+\gamma&0&0\\0&-\mu&\omega+\gamma&0\\0&0&-\omega&\gamma\end{bmatrix}$$

พิจารณา $\det[FV^{-1}(E_0)-\lambda I]$

$$FV^{-1}(E_0)=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&(1-\varepsilon)\beta S&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\gamma}&\frac{-(1-\varepsilon)\beta S\mu}{\gamma(\mu+\gamma)(\omega+\gamma)}&\frac{-(1-\varepsilon)\beta S}{\gamma(\omega+\gamma)}&0\\0&\frac{1}{(\mu+\gamma)}&0&0\\0&\frac{\mu}{(\mu+\gamma)(\omega+\gamma)}&\frac{1}{(\omega+\gamma)}&0\\0&\frac{\mu\omega}{\gamma(\mu+\gamma)(\omega+\gamma)}&\frac{\omega}{\gamma(\omega+\gamma)}&\frac{1}{\gamma}\end{bmatrix}$$

$$FV^{-1}(E_0)-\lambda I=\begin{bmatrix}0-\lambda&0&0&0\\0&\frac{(1-\varepsilon)\beta S\mu}{(\mu+\gamma)(\omega+\gamma)}-\lambda&\frac{(1-\varepsilon)\beta S}{(\omega+\gamma)}&0\\0&0&0-\lambda&0\\0&0&0&0-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\det\left[FV^{-1}(E_0)-\lambda I\right]=(-\lambda)^3\left(\frac{(1-\varepsilon)\beta S\mu}{(\mu+\gamma)(\omega+\gamma)}-\lambda\right)$$

จะได้ $0=(-\lambda)^3\left(\frac{(1-\varepsilon)\beta S\mu}{(\mu+\gamma)(\omega+\gamma)}-\lambda\right)$, $0=(-\lambda)^3$

ดังนั้น $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$ และ $\lambda_4 = \left(\frac{(1-\varepsilon)\beta S\mu}{\gamma(\mu+\omega)}\right)$ จากบทนิยาม Spectral radius (R_0)

จากเมตริกซ์ $FV^{-1}(E_0)$ คือ $$P\left(FV^{-1}(E_0)\right) = \frac{(1-\varepsilon)\beta\mu N}{\gamma(\mu+\omega)}$$

จะได้ค่าระดับการติดเชื้อ คือ $R_0 = \frac{(1-\varepsilon)\beta\mu N}{\gamma(\mu+\omega)}$

ดังนั้น จุดสมดุลที่มีโรคมีเสถียรภาพ เมื่อ $R_0 > 1$ โดย $R_0 = \left(\frac{(1-\varepsilon)\beta\mu\alpha N}{\gamma(\mu+\omega)}\right)$ โดยพิจารณา ดังนี้

1. ค่า R_0 ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรคมีค่า $R_0 < 1$ จะไม่เกิดการแพร่ระบาด
2. ค่า R_0 ณ จุดสมดุลที่มีโรคมีค่า $R_0 > 1$ จะเกิดการแพร่ระบาด
3. ค่า R_0 ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรคมีค่า $R_0 = 1$ โรคเริ่มมีความเสถียร

3.4.4 การวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Numerical Analysis) การวิจัยในครั้งนี้ผู้วิจัยได้ทำการวิเคราะห์เชิงตัวเลข โดยการนำค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากกรมควบคุมโรคจำนวนผู้ป่วยที่เป็นโรคหนองในแท้ ซึ่งมีค่าต่างๆ ดังนี้

ตารางที่ 1 ตารางแสดงค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ของโรคหนองในแท้

ข้อความ	สัญลักษณ์	ค่าพารามิเตอร์	หน่วย
จำนวนประชากรทั้งหมด	N	416,582	คน
อัตราการเกิดของประชากร	α	4.81479E-05	ต่อวัน
อัตราการตายโดยธรรมชาติ	γ	1.77044E-05	ต่อวัน
อัตราการสัมผัสเชื้อ	β	9.07582E-06	ต่อวัน
อัตราการฟักตัวของเชื้อ	μ	1.29655E-07	ต่อวัน
อัตราการมีภูมิคุ้มกัน	ω	6.48273E-07	ต่อวัน
อัตราการสวมถุงยางอนามัย	ε	0-1	

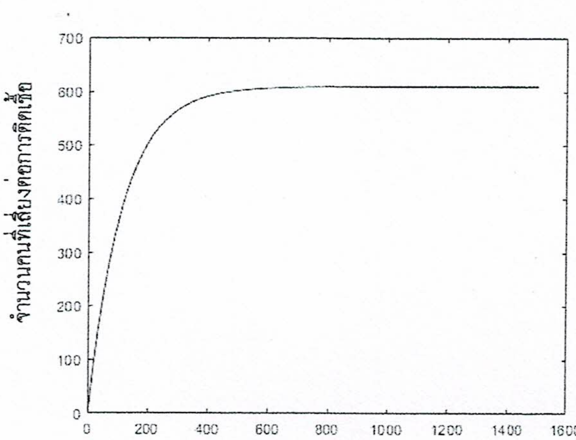
ผู้วิจัยได้ศึกษาการให้ความรู้เกี่ยวกับอัตราการสวมถุงยางอนามัยแล้วหาค่าระดับการติดเชื้อ (Basic Reproductive Number: R_0) พบว่าความสัมพันธ์ระหว่างค่าพารามิเตอร์ของการให้ความรู้กับค่าระดับการติดเชื้อได้ดังตารางที่ 2 ดังนี้

ตารางที่ 2 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าพารามิเตอร์การศึกษาให้ความรู้เกี่ยวกับอัตราสวมถุงยางอนามัยกับค่าระดับการติดเชื้อ

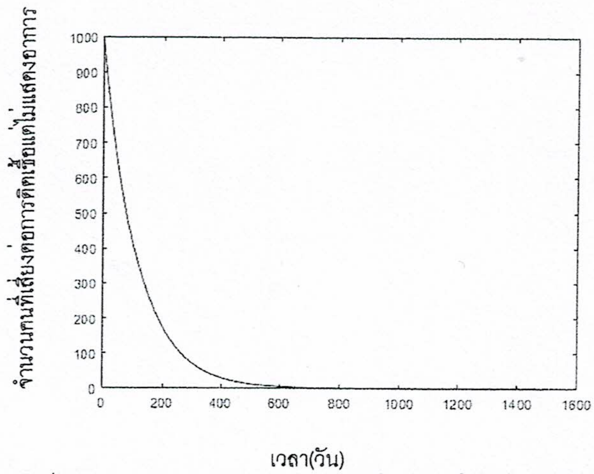
อัตราการสวมถุงยางอนามัย(ε)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.99	1	1
ค่าระดับการติดเชื้อ R_0	138.94	123.5	108.06	92.62	77.19	61.75	46.312	30.87	15.44	1.54	0.15	0

จากตารางที่ 2 พบว่าการให้ความรู้เกี่ยวกับอัตราการสวมถุงยางอนามัยของโรคหนองในแท้เป็นปัจจัยหนึ่งที่มีผลต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคหนองในแท้ โดยการศึกษาอัตราการสวมถุงยางอนามัยที่มีผลต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโรคหนองในแท้ (ε) มีค่ามากขึ้นส่งผลให้ค่าระดับการติดเชื้อ R_0 ลดลง และไม่เกิดการแพร่ระบาด

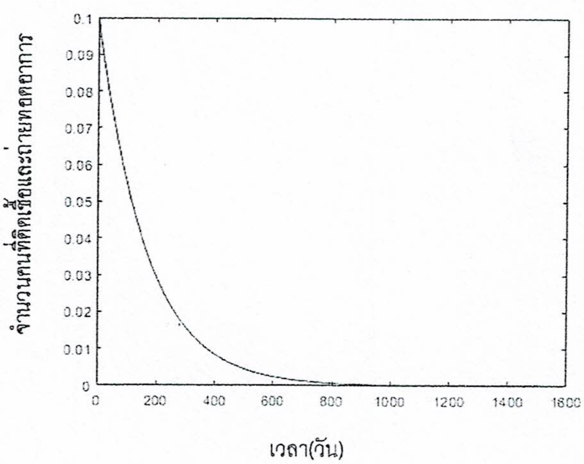
เมื่อพิจารณาเสถียรภาพของระบบ ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรค จะพบว่าค่าลักษณะเฉพาะเฉพาะ $\lambda_1 = -0.0000177, \lambda_2 = -0.0000177, \lambda_3 = -0.0017841$ และ $\lambda_4 = -0.0648273$ ซึ่งทุกค่ามีส่วนจริงเป็นค่าลบและสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Roth-Hurwitz ส่งผลให้คำตอบจะลู่เข้าสู่จุดสมดุล $E_0 = (416582,0,0,0)$ ดังนั้น จุดสมดุลไม่มีโรค E_0 จะเป็น Local asymptotically ดังรูป



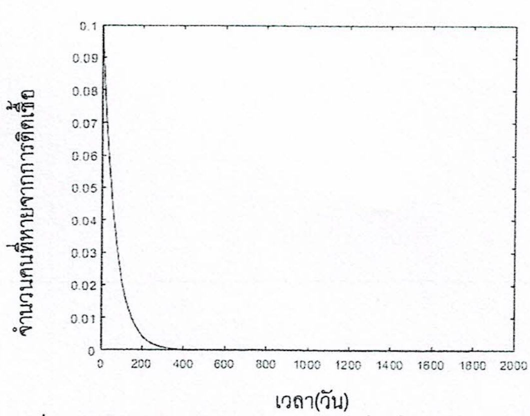
รูปที่ 3 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มเสี่ยง (S) ณ เวลา t ใดๆ ณ จุดเสถียรภาพของจุดสมดุลที่ไม่มีโรคในจังหวัดภูเก็ต



รูปที่ 4 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มที่ติดเชื้อแต่ไม่แสดงอาการ (E) ณ เวลา t ใดๆ ณ จุดเสถียรภาพของจุดสมดุลที่ไม่มีโรคในจังหวัดภูเก็ต

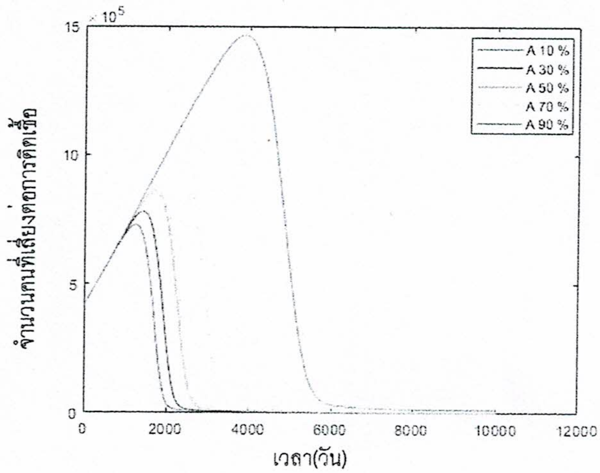


รูปที่ 5 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มที่ติดเชื้อและแสดงอาการ (I) ณ เวลา t ใดๆ ณ จุดเสถียรภาพของจุดสมดุลที่ไม่มีโรคในจังหวัดภูเก็ต

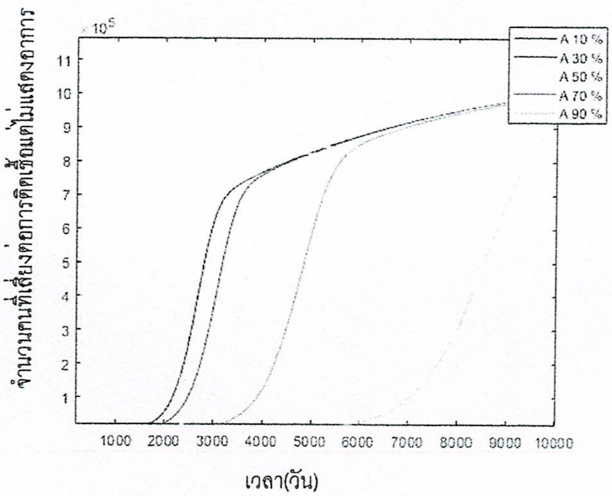


รูปที่ 6 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มที่หายป่วยจากโรค (R) ณ เวลา t ใดๆ ณ จุดเสถียรภาพของจุดสมดุลที่ไม่มีโรคในจังหวัดภูเก็ต

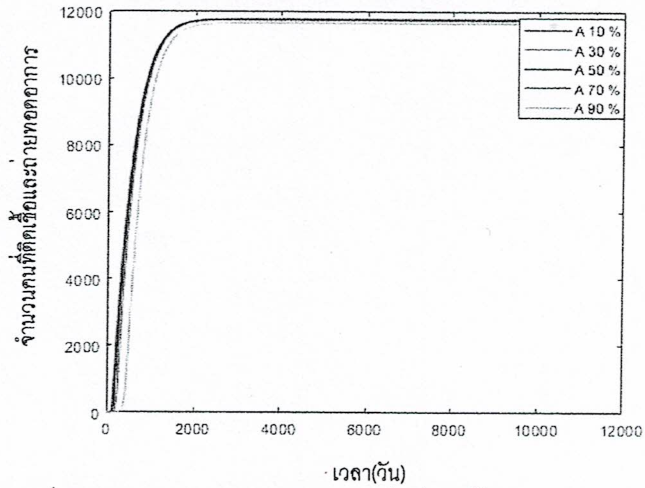
เมื่อพิจารณาเสถียรภาพของระบบ ณ จุดสมดุลที่มีโรค จะพบว่าค่าลักษณะเฉพาะของสมการ $\lambda^4, \lambda^3, \lambda^2, \lambda = 0$ สอดคล้องกับเงื่อนไข Roth-Hurwitz ส่งผลให้คำตอบลู่เข้าสู่จุด $R_0 > 1$ เมื่อ $N = 416{,}582, \alpha = 0.0000481479, \gamma = 0.0000177044, \beta = 0.00000907582, \mu = 0.000000129655, \omega = 0.000000648273$ $\varepsilon = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ $R_0 = 42.076 > 1$ S, E, I, R: หน่วยเป็นคน และ t: หน่วยเป็นเวลา กรณี $R_0 > 1$ เกิดการแพร่ระบาดของโรค ดังนั้น เข้าสู่จุดสมดุลที่มีโรค (Endemic Equilibrium Point: E_1) ดังรูปต่อไปนี้



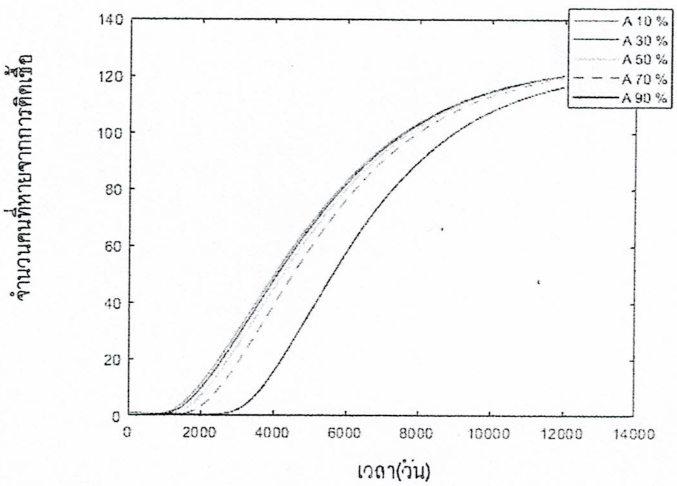
รูปที่ 7 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มเสี่ยง (S) ณ เวลา t ใดๆเมื่อ $(\varepsilon) = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ และ 0.9 ณ จุดเสถียรภาพของจุดสมดุลที่มีโรคในจังหวัดภูเก็ต



รูปที่ 8 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มที่ติดเชื้อแต่ไม่แสดงอาการ (E) ณ เวลา t ใดๆ เมื่อ $(\varepsilon) = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ และ0.9 ณ จุดเสถียรภาพของจุดสมดุลที่โรคในจังหวัดภูเก็ต



รูปที่ 9 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มที่ติดเชื้อและแสดงอาการ (I) ณ เวลา t ใดๆ เมื่อ (ε) = 0.1,0.3,0.5,0.7 และ 0.9 ณ จุดเสถียรภาพของจุดสมดุลที่มีโรคในจังหวัดภูเก็ต



รูปที่ 10 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มที่หายป่วยจากโรค (R) ณ เวลา t ใดๆ เมื่อ (ε) = 0.1,0.3,0.5,0.7 และ 0.9 ณ จุดเสถียรภาพของจุดสมดุลที่มีโรคในจังหวัดภูเก็ต

จากการศึกษาอัตราการสวมถุงยางอนามัยของการแพร่ระบาดของโรคหนองในแท้เป็นปัจจัยหนึ่งที่มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการแพร่ระบาดของโรคหนองในแท้โดยอัตราการสวมถุงยางอนามัยโดยพบว่าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อโรคหนองในแท้มีความรู้เกี่ยวกับการป้องกันโรคหนองในแท้น้อยจะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคเพิ่มขึ้นและถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อโรคหนองในแท้มีความรู้เกี่ยวกับการป้องกันการสวมถุงยางอนามัยที่มีผลต่อโรคหนองในแท้เป็นจำนวนมากขึ้นจะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคลดลงจนกระทั่งไม่มีการแพร่ระบาดของโรคหนองในแท้

5. ผลการศึกษาและอภิปรายผล

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการแพร่ระบาดของโรคหนองในแท้โดยการศึกษาอัตราการสวมถุงยางอนามัยที่มีผลต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ และวิเคราะห์เสถียรภาพของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคหนองในแท้โดยการศึกษาอัตราการสวมถุงยางอนามัยที่มีผลตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์งานวิจัยในครั้งนี้ใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ คือ ระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้นซึ่งประกอบด้วย ประชากรกลุ่มเสี่ยงต่อการติดเชื้อ ประชากรกลุ่มที่ติดเชื้อแต่ไม่แสดงอาการ กลุ่มที่ติดเชื้อและแพร่เชื้อ และกลุ่มที่หายป่วยจากโรค ซึ่งผู้วิจัยได้เพิ่มค่าพารามิเตอร์ของการให้ความรู้เกี่ยวกับอัตราการสวมถุงยางอนามัย (ε) เป็นปัจจัยสำคัญในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์แล้วใช้วิธีมาตรฐาน และวิเคราะห์เชิงตัวเลขและตรวจสอบการแพร่ระบาดของโรค

ผู้วิจัยได้พิจารณาจุดสมดุลที่ไม่มีโรคและจุดสมดุลที่มีโรค โดยการวิเคราะห์จุดสมดุลและเสถียรภาพของจุดสมดุลด้วยวิธีการวิเคราะห์วิธีมาตรฐาน ซึ่งค่าเสถียรภาพของระบบ Local asymptotically ที่ได้เป็นไปตามเงื่อนไขของ Roth-Hurwitz เพื่อให้สามารถหาค่าพารามิเตอร์ R_0 ซึ่งมีความจำเป็นภายใต้เงื่อนไข เพื่อให้ มีความเสถียรภาพในส่วนของจุดสมดุลที่ไม่มีโรค และจุดสมดุลที่มีการแพร่ระบาดของโรค โดยที่ $R_0 = \frac{(1-\varepsilon)\beta\mu N}{\gamma(\mu+\omega)}$ สามารถพิจารณาค่าระดับการติดเชื้อ (Basic Reproductive Number: R_0) โดยที่ $R_0 < 1$ วิเคราะห์ได้ว่า ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรคไม่เกิดการแพร่ระบาดของโรค และ $R_0 > 1$ วิเคราะห์ได้ว่า ณ จุดสมดุลที่มีโรคจะเกิดการแพร่ระบาดของโรค จากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขพบว่าจุดสมดุลทั้งสองเป็น Local asymptotically ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรค เมื่อ $\varepsilon = 0.999$ และ 1 พบว่าค่าระดับการติดเชื้อ $R_0 = 0.15437429$ และ 0 ตามลำดับ และ ณ จุดสมดุลที่มีโรค $\varepsilon = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ และ 0.99 พบว่าค่าระดับการติดเชื้อ $R_0 = 138.9368613, 123.4994322, 108.0620032, 92.62457417, 77.18714514, 61.74971611, 46.31228708, 30.87485806, 15.43742903$ และ 1.543742903 ตามลำดับ ปัจจัยที่ส่งผลต่อค่าระดับการติดเชื้อของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งศึกษาอัตราการสวมถุงยางอนามัย มีค่ามากส่งผลให้ค่าระดับการติดเชื้อลดลง และยังพบว่าถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ มีความรู้เกี่ยวกับการแพร่ระบาดของโรคหนองในแท้น้อย จะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคเพิ่มขึ้นและถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ มีความรู้เกี่ยวกับการแพร่ระบาดของโรคหนองในแท้ เป็นจำนวนมากขึ้นจะส่งผลให้การแพร่ระบาดการติดเชื้อของโรคลดลง จนกระทั่งไม่มีการแพร่ระบาดของโรค

6. สรุป

จากการวิจัยพบว่าการศึกษาอัตราการสวมถุงยางอนามัยที่มีผลต่อตัวแบบคณิตศาสตร์ของโรคหนองในแท้ ในจังหวัดภูเก็ต โดยพบว่าถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อโรคหนองในแท้มีความรู้เกี่ยวกับเรื่องการป้องกันโดยการสวมใส่ถุงยางอนามัยอย่างถูกวิธีและ รู้ว่าถุงอย่างอนามัยนั้นควรสวมใส่เมื่อมีเพศสัมพันธ์กับคู่นอนที่ไม่ใช่คู่ของตัวเองก็จะลดการแพร่ระบาดของโรคติดต่อทางเพศสัมพันธ์ลดลง จนกระทั่งไม่มีการแพร่ระบาดของโรคหนองในแท้

ดังนั้นสามารถนำผลจากการวิจัยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ SEIR โดยการศึกษาอัตราการสวมถุงยางอนามัยที่มีผลต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโรคหนองในแท้ ในจังหวัดภูเก็ต นำไปใช้เป็นข้องมูลเบื้องต้นในการป้องกันโรคเพื่อลดจำนวนผู้ป่วยใน ชุมชน ตำบล และจังหวัดภูเก็ต และใช้เป็นข้อมูลทาง

วิชาการให้กับหน่วยงานสาธารณสุขดำเนินการมตรการป้องกันโรคหนองในแท้โดยการให้ความรู้เกี่ยวกับเรื่องการสวมใส่ถุงยางอนามัยให้กับประชาชนและกลุ่มวัยรุ่นทั่วไปที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ

7. ข้อเสนอแนะ

7.1 ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ได้จากการศึกษาครั้งนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับโรคชนิดอื่นที่คล้ายๆกับโรคติดต่อทางเพศสัมพันธ์ หรือโรคติดต่อผ่านการสัมผัสกัน

7.2 สามารถนำผลงานวิจัยนี้ไปศึกษาองค์ประกอบในเรื่องอื่นๆที่มีผลต่อการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคหนองในแท้ โดยการเพิ่มค่าพารามิเตอร์อื่นๆ ได้แก่ การป้องกันด้วยการฉีดยาวัคซีน เป็นต้น

8. เอกสารอ้างอิง

กรมควบคุมโรค. (2562) .*จำนวนผู้โรคหนองในแท้.* สำนักระบาดวิทยา กระทรวงสาธารณสุขจังหวัดภูเก็ต

กรมควบคุมโรค. (2563). *โรคหนองใน (GONORRHOEA).* สำนักระบาดวิทยา กระทรวงสาธารณสุข. โรงพยาบาลเปาโล พหลโยธิน. [Online]. https://www.paolohospital.com/th-TH-GONORRHOEA, (8 กันยายน 2563)

สร้อยสน สกลรักษ์. (2560). *ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์.* วารสารครุศาสตร์มหาวิทยาลัยจุฬาลงกรณ์ ปีที่45 ฉบับที่ 2. ประจำเดือนเมษายน-มิถุนายน 2560.

สำเริง ชื่นรังสิกุล. (2559). *สมการเชิงอนุพันธ์* (พิมพ์ครั้งที่2). กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อนุวัตร จิรวัฒน์นพานิช และคณะ. (2559ก). *ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของไข้หวัดใหญ่โดยการสวมหน้ากากอนามัย.* การประชุมวิชาการระดับชาติมหาวิทยาลัยราชภัฏ สงขลา ครั้งที่ 6, 15-16 สิงหาคม 2559. สงขลา: มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา.

อนุวัตร จิรวัฒน์นพาณิช และคณะ. (2559ข). *ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ SEIR สำหรับการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคอีสุกอีใสโดยการรณรงค์ให้ความรู้.* วารสารวิชาการมหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต ปีที่ 13 (2). (น. 254-275). ภูเก็ต: มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต.

คันฉางค์. (2558-2562) *โรคติดต่อทางเพศสัมพันธ์ที่ดีที่สุดคือการใช้ถุงยางอนามัยทุกครั้งเมื่อมีเพศสัมพันธ์.* [Online]. http://www.voicetv.co.th/read/saZ9E3WPw , (30 สิงหาคม 2563)

C.M. Kribs-Zaleta, J.X. Valesco-Hernandez. (2000). *A simple vaccination model with multiple endemic states*. Mathematical Biosiences, 164 (2): 183-201.

Henry O. Pollak. 2555. *Mathematical Modelling*. (ออนไลน์). แหล่งที่มา:http://www.comap.com/modelingHB/Modelling_HB_Sample.pdf

Kermack, W. O. and McKendrick, A. G. (1927). *A Contribution to the Mathematical Theory of Eqidemics*. Proc. Roy. Soc. Lond. A 115: 700-721.