ครั้งที่ 11

การประชุมวิชาการระดับชาติ

Community-led

Social Innovation

in the Era of Global Changes amidst Covid-19 Crisis

นวัตกรรมทางสังคมของชุมชนในยุค
ของการเปลี่ยนแปลงโลกท่ามกลาง
วิกฤตโควิด -19

19 กุมภาพันธ์ 2564

ร่วมกับ

PTG

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบ บี โดยการฉีดวัคซีน ในจังหวัดภูเก็ต

Mathematical Model for Controlling the Spread of Hepatitis B by Vaccination in Phuket

ธีรเดช พรหมกุล*[1] และ อนุรักษ์ วีระประเสริฐสกุล[2]
Teeradet Phromkul*[1] and Anuruk Weraprasertsakun[2]

นักศึกษาปริญญาตรี สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต[1]
Undergraduate Student in Applied Mathematics Faculty of Science and Technology Phuket Rajabhat University[1]
อาจารย์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต[2]
Faculty Member in Mathematics Faculty of Education Phuket Rajabhat University[2]
* Corresponding author, e-mail: teeradet5796@gmail.com, อีเมล์ anurak.w@pkru.ac.th

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี โดยการฉีดวัคซีน ในจังหวัดภูเก็ต วิเคราะห์ตัวแบบโดยใช้วิธีมาตรฐาน ศึกษาจุดสมดุล ศึกษาเสถียรภาพของจุดสมดุล หาคำตอบเชิงวิเคราะห์ ศึกษาอัตราการฉีดวัคซีนป้องกันการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี ในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ และหาคำตอบเชิงตัวเลข ผลการวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี โดยการฉีดวัคซีน ในจังหวัดภูเก็ต เป็นปัจจัยที่ส่งผลต่อค่าระดับการติดเชื้อของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งอัตราการฉีดวัคซีนป้องกันการแพร่ระบาดของโรค ไวรัสตับอักเสบบี (α) มีค่ามากขึ้นส่งผลให้ค่าระดับการติดเชื้อลดลงและยังพบว่า ถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ มีจำนวนน้อยที่ได้รับวัคซีนป้องกันโรคไวรัสตับอักเสบบี (α) จะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบีเพิ่มขึ้น และถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อได้รับการฉีดวัคซีนป้องกันโรคไวรัสตับอักเสบบี (α) เป็นจำนวนมากขึ้น จะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคลดลง จากการพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโรคไวรัสตับอักเสบบี โดยการฉีดวัคซีน สามารถนำผลจากการวิจัยใช้เป็นข้อมูลเบื้องต้นในการป้องกันโรคไวรัสตับอักเสบบีเพื่อลดจำนวนผู้ป่วยและใช้เป็นข้อมูลทางวิชาการให้กับหน่วยงานที่เกี่ยวข้อง

คำสำคัญ: ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ โรคไวรัสตับอักเสบ บี การฉีดวัคซีน การแพร่ระบาด

Abstract

The objective of this research was to study and develop a mathematical model for *Hepatitis* B. outbreak control through vaccination in Phuket. The model was analyzed using a standard method of examining the equilibrium point and its consistency, analytical solutions, the vaccination rate against *Hepatitis* B. outbreak, and numerical solutions. According to the mathematical model analysis results, it was found that *Hepatitis* B. vaccination for the outbreak control had higher effect on *Hepatitis* B. infection, resulting in lower infection level. Also, the lower rate of vaccinated people prone to *Hepatitis* B. infection would result in an increase of the outbreak. Contrarily, the higher rate of vaccinated people would reduce the outbreak. The findings suggested that developing the mathematical model of *Hepatitis* B. through vaccination can help reduce the number of patients and can serve as basic information for other involved organizations.

Keywords: Mathematical Model, *Hepatitis* B., Vaccination, Outbreak

บทนำ

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นวิธีการหนึ่งของการอธิบายสถานการณ์ในชีวิตจริงแบบภาษาคณิตศาสตร์ โดยการเปลี่ยนสถานการณ์ให้อยู่ในรูปของสมการและตัวแปร โดยจะให้ความสำคัญกับตัวแปรที่สำคัญ แบบจำลองมีจุดมุ่งหมายเพื่อจะจับองค์ประกอบที่สำคัญที่สุดของเหตุการณ์หนึ่ง ๆ เราสามารถจะตรวจดูความถูกต้องของกลไกคณิตศาสตร์หนึ่งที่ถูกสร้างขึ้นมาได้เพื่อจะตรวจสอบว่า แบบจำลองนั้นสะท้อนสถานการณ์ในชีวิตจริงหรือไม่ (แคทลียา ดวงเกตุ, 2556) จากการศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคต่าง ๆ ทำให้ทราบถึงการแพร่ระบาดและผลลัพธ์ที่ได้จากตัวแบบ ช่วยให้เข้าถึงปัจจัยที่สามารถควบคุมการแพร่ระบาดของโรคได้ รวมทั้งมีความเข้าใจที่ถูกต้องเกี่ยวกับการติดต่อของโรค ดังนั้นผลลัพธ์ที่ได้ของการศึกษานี้จะเป็นประโยชน์อย่างมากในการลดความเสี่ยงของการติดเชื้อโรค การแพร่เชื้อและการควบคุมโรคระบาด โดยที่ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์แสดงให้เห็นถึงบทบาทและประโยชน์ของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่มีส่วนช่วยในการแก้วิกฤตการณ์ที่กำลังเกิดขึ้นจากโรคภัยต่าง ๆ โดยจะจำลองประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ตัวเชื้อโรค ตัวพาหะนำโรค และผู้ติดเชื้อ โดยแปลงข้อมูลให้อยู่ในรูปสมการทางคณิตศาสตร์ เพื่ออธิบายลักษณะของการระบาดและการดำเนินของโรคโดยที่ผู้วิจัยไม่จำเป็นต้องไปศึกษากับมนุษย์โดยตรงซึ่งอาจเกิดอันตรายต่อชีวิตของผู้วิจัยและผู้ป่วยได้ อีกทั้งยังช่วยลดงบประมาณสำหรับการเสริมมาตรการการรักษาและการป้องกันโรคตามความต้องการที่แท้จริงได้อย่างรวดเร็วและเหมาะสมที่สุดด้วย

ไวรัสตับอักเสบมีอยู่ด้วยกันหลายชนิด ชนิดเอ บี ซี ดี และ อี ซึ่งหนึ่งในไวรัสเหล่านี้เมื่อได้รับเชื้อแล้วมีแนวโน้มที่อาจเกิดภาวะตับอักเสบเรื้อรัง ตับแข็ง และอาจร้ายแรงจนกลายเป็นมะเร็งตับนั้น คือ ไวรัสตับอักเสบชนิดบีหรือเรียกว่า ไวรัสตับอักเสบบี โดยข้อมูลจากองค์การอนามัยโลกปี 2562 พบว่า ทั่วโลกมีผู้ป่วยภาวะตับอักเสบบีเรื้อรังมากกว่า 257 ล้านคน และในทุก ๆ ปีจะมีผู้ติดเชื้อไวรัสตับอักเสบบี มากกว่า 6 แสนรายเสียชีวิตเนื่องจากโรคแทรกซ้อนที่เกิดจากภาวะตับอักเสบบีเรื้อรังรวมทั้งโรคตับแข็งและมะเร็งตับ ส่วนประเทศไทยเป็นประเทศที่มีโรคไวรัสตับอักเสบบีอยู่มากแห่งหนึ่งของโลก โดยมีผู้ที่เป็นพาหะหรือผู้ที่มีเชื้อไวรัสบีอยู่ในกระแสเลือดถึงร้อยละ 7 ของประชากรทั้งหมดหรือประมาณ 9 ล้านคน (ศูนย์ข้อมูลโรคติดต่อเชื้อและพาหะนำโรค, 2562) ในเขตพื้นที่จังหวัดภูเก็ตมีผู้ป่วยโรคมะเร็งตับส่วนใหญ่ ประมาณร้อยละ 90 มีประวัติเป็นโรคไวรัสตับอักเสบบีมาก่อน โดยเมื่อมีการรับเชื้อไวรัสตับอักเสบบีเข้าสู่ร่างกาย ส่วนมากผู้ที่ได้รับเชื้อจะไม่รู้ตัว เนื่องจากไม่มีอาการป่วยใด ๆ ปรากฏ การดำเนินของโรคจึงเป็นไปอย่างเงียบ ๆ บางรายอาจมีไข้หรือปวดเมื่อยตามเนื้อตัว ซึ่งทำให้เข้าใจผิดไปได้ว่าเป็นเพียงไข้หวัดธรรมดา โดยจังหวัดภูเก็ตจะเริ่มมีการให้ฉีดวัคซีนป้องกันตั้งแต่เด็ก แต่ยังคงมีประชากรในจังหวัดส่วนหนึ่งที่เป็นพาหะของโรคและสามารถแพร่เชื้อต่อไปเรื่อย ๆ เนื่องจากพึ่งเริ่มมีการฉีดวัคซีนเมื่อปี พ.ศ.2535 ดังนั้นจะพบมากในคนที่มีอายุ 30 ปีขึ้นไป ซึ่งผู้ติดเชื้อจะไม่มีอาการแต่จะมีการดำเนินของโรคไปอย่างต่อเนื่อง ทำให้ผู้ป่วยไม่ได้ดูแลตนเองหรือไม่ได้รับการรักษาจากแพทย์อย่างถูกต้องตั้งแต่ต้นและมีความรู้เกี่ยวกับการป้องกันโรคน้อยจึงทำให้เกิดการแพร่เชื้อไปเรื่อย ๆ (อนุวัตร จิรวัฒน-พาณิช, 2562)

จากเหตุผลข้างต้นผู้วิจัยได้ตระหนักและเห็นประโยชน์ที่จะได้รับจากการวิจัยเรื่องตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี โดยการฉีดวัคซีน จึงได้ศึกษาเกี่ยวกับการฉีดวัคซีนป้องกันเพื่อควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี ในจังหวัดภูเก็ต ให้เป็นปัจจัยสำคัญสำหรับการศึกษาในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

วัตถุประสงค์การวิจัย

1. เพื่อศึกษาและพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี โดยการฉีดวัคซีน

2. เพื่อวิเคราะห์เสถียรภาพของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี โดยการฉีดวัคซีนในจังหวัดภูเก็ต

วิธีการวิจัย

การดำเนินการวิจัยเรื่อง ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรงไวรัสตับอักเสบบี โดยการฉีดวัคซีน ผู้วิจัยจะศึกษาและพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการฉีดวัคซีนป้องกันการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี โดยจะมีวิธีการดำเนินการ 4 ขั้นตอนดังนี้

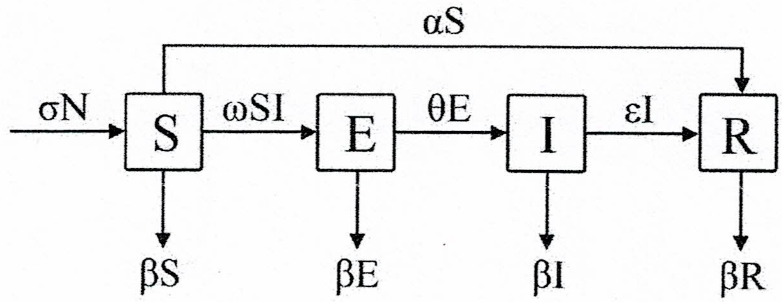
1. การพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ได้ศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ S E I R ซึ่งผู้วิจัยสนใจอัตราการฉีดวัคซีนป้องกันการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี โดยผู้วิจัยได้พัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการฉีดวัคซีนป้องกันการ

แพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี โดยผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวกับโรคไวรัสตับอักเสบบี โดยกำหนดประชากรมนุษย์มีจำนวนคงที่ ซึ่งตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ดังกล่าวมีข้อตกลงดังนี้

แบ่งประชากรออกเป็น 4 กลุ่มคือ

1) กลุ่มคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (susceptible: S)
2) กลุ่มคนที่ติดเชื้อแต่ไม่แสดงอาการ (Expose: E)
3) กลุ่มคนที่ติดเชื้อแสดงอาการ (Infectious: I)
4) กลุ่มคนที่หายจากโรค (Recovered: R)

โดยที่ผู้วิจัยสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรงไวรัสตับอักเสบบี โดยการฉีดวัคซีน จะได้ ดังนี้



รูปที่ 1 ความสัมพันธ์และองค์ประกอบของตัวแบบเชิงคณตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี โดยการฉีดวัคซีนป้องกัน

เมื่อ S คือ จำนวนคนที่เสี่ยงต่อติดเชื้อโรค E คือ จำนวนคนที่ติดเชื้อโรคแต่ไม่แสดงอาการ I คือ จำนวนคนที่ติดเชื้อโรค R คือ จำนวนคนป่วยที่หายจากโรค σ คือ อัตราการเกิดใหม่ของประชากรมนุษย์ α คือ อัตราการฉีดวัคซีน β คือ อัตราการตายของประชากร ω คือ อัตราการสัมผัสเชื้อ θ คือ อัตราการฟักตัวของเชื้อ ε คือ อัตราการหายจากโรค N คือ จำนวนประชากรมนุษย์ทั้งหมด ในจังหวัดภูเก็ต

2. การตรวจสอบตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบีโดยการฉีดวัคซีน เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของตัวแบบดังนั้นจำเป็นต้องดำเนินการโดยให้ผู้เชี่ยวชาญที่เกี่ยวข้อง ได้แก่ ผู้ทรงคุณวุฒิทางคณิตศาสตร์ (ผศ.ดร.บัณฑิตย์ อันยงค์) และนักระบาดวิทยา (นายนภดล แก้วมหิทธิ์) ตรวจสอบแผนภาพและสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น หลังจากนั้นจึงได้แก้ไขและปรับปรุงตามข้อเสนอแนะ (ภาพที่ 1) ได้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น ดังสมการ (1)-(4)

$$\frac{dS}{dt} = \sigma N - \alpha S - \omega SI - \beta S \tag{1}$$

$$\frac{dE}{dt} = \omega SI - \theta E - \beta E \tag{2}$$

$$\frac{dI}{dt} = \theta E - \varepsilon I - \beta I \tag{3}$$

$$\frac{dR}{dt} = \alpha S + \varepsilon I - \beta R \tag{4}$$

นำตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ข้างต้นมาวิเคราะห์เสถียรภาพของตัวแบบต่อไป

3. การวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ เป็นการวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐาน (Standard Method) โดยการศึกษาจุดสมดุลและศึกษาเสถียรภาพของจุดสมดุลเพื่อเงื่อนไขของพารามิเตอร์ที่เหมาะสมของจุดสมดุล หาค่าระดับการติดเชื้อโดยใช้วิธี Next Generation Method หาคำตอบเชิงวิเคราะห์และคำตอบเชิงตัวเลข โดยวิธี Numerical Analysis ดังวิธีการต่อไปนี้

3.1 การวิเคราะห์ตามวิธีการมาตรฐาน (Standard Method) การวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐานเป็นการศึกษาหาจุดสมดุล ค่าระดับการติดเชื้อ และเสถียรภาพของระบบ ได้ดังนี้

3.1.1 การหาจุดสมดุล (Equilibrium Point)

การหาจุดสมดุลดำเนินการโดยจัดสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ให้เท่ากับศูนย์ คือ $\frac{dS}{dt}=0$, $\frac{dE}{dt}=0$, $\frac{dI}{dt}=0$ และ $\frac{dR}{dt}=0$ จากสมการ (1)-(4) ตามลำดับ จะได้ค่า ณ จุดสมดุลไม่มีโรค (Disease Free Equilibrium Point: E_0) โดยกำหนดให้ $E=0$ จะได้ $I=0$ และ $R=0$ และแทนในสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น จะได้ $S=1$ ดังนั้น $E_0(S,E,I,R)=E_0(1,0,0,0)$ และ ณ จุดสมดุลที่มีโรค (Endemic Equilibrium Point: E_1) โดยกำหนดให้ $E^*>0$ จะได้ $E_0(S^*,E^*,I^*,R^*)$

3.1.2 การหาค่าระดับการติดเชื้อ (Basic Reproductive Number: R_0)

ค่าระดับการติดเชื้อเป็นค่าเฉลี่ยที่ผู้ป่วยหนึ่งคนสามารถทำให้คนกลุ่มเสี่ยงป่วยเป็นจำนวนกี่คนในช่วงของเวลาที่เขายังป่วยอยู่ โดยใช้วิธีการ Next Generation Method โดยจัดสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น จากสมการ (1)-(4) จะได้เมตริกซ์ในรูป $\frac{dX}{dt}=F(X)-V(X)$ เพื่อหาค่า spectral radius (R_0) จากเมตริกซ์ $\rho(FV^{-1})$ ซึ่ง $F(X)$ และ $V(X)$ ได้จากอนุพันธ์ย่อย (Partial derivative) ดังนี้

$$X=\begin{bmatrix}S\\E\\I\\R\end{bmatrix},\ F=\left[\frac{d(F(X_i))}{dX_i}\right] \text{ และ } V=\left[\frac{d(V(X_i))}{dX_i}\right]$$

เมื่อ $F(X)$ คือ เมตริกซ์ของผู้ป่วยเพิ่มขึ้น และ $V(X)$ คือ เมตริกซ์ของผู้ป่วยที่เปลี่ยนสถานะ จากกลุ่มหนึ่งไปเป็นอีกกลุ่มหนึ่งโดยพิจารณาค่าระดับการติดเชื้อ R_0 ดังนี้

$$F(X)=\begin{bmatrix}0\\ \omega SI\\0\\0\end{bmatrix} \text{ และ } V(X)=\begin{bmatrix}-\sigma N+\alpha S+\omega SI+\beta S\\ \theta E+\beta E\\ -\theta E+\varepsilon I+\beta I\\ -\alpha S-\varepsilon I+\beta R\end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$FV^{-1}(E_0)=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&\frac{\omega\sigma N\theta}{(\theta+\beta)(\varepsilon+\beta)(\alpha+\beta)}&\frac{\omega\sigma N}{(\varepsilon+\beta)(\alpha+\beta)}&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$FV^{-1}(E_0)-\lambda I_4=\begin{bmatrix}-\lambda&0&0&0\\0&\frac{\omega\sigma N\theta}{(\theta+\beta)(\varepsilon+\beta)(\alpha+\beta)}-\lambda&\frac{\omega\sigma N}{(\varepsilon+\beta)(\alpha+\beta)}&0\\0&0&-\lambda&0\\0&0&0&-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\det\left[FV^{-1}(E_0)-\lambda I_4\right]=\begin{bmatrix}-\lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\omega\sigma N\theta}{(\theta+\beta)(\varepsilon+\beta)(\alpha+\beta)}-\lambda & \frac{\omega\sigma N}{(\varepsilon+\beta)(\alpha+\beta)} & 0\\ 0 & 0 & -\lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\lambda\end{bmatrix}$$

จะได้ $$0=(-\lambda)(-\lambda)(-\lambda)\left(\frac{\omega\sigma N\theta}{(\theta+\beta)(\varepsilon+\beta)(\alpha+\beta)}-\lambda\right)$$

โดย $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=0$ และ $\lambda_4=\dfrac{\omega\sigma N\theta}{(\theta+\beta)(\varepsilon+\beta)(\alpha+\beta)}$

คำนวณหาค่า spectral radius ของ $FV^{-1}(E_0)$ เขียนแทนด้วย $\rho\left(FV^{-1}(E_0)\right)=\dfrac{\omega\sigma N\theta}{(\theta+\beta)(\varepsilon+\beta)(\alpha+\beta)}$

จะได้ $R_0=\dfrac{\omega\sigma N\theta}{(\theta+\beta)(\varepsilon+\beta)(\alpha+\beta)}$

โดยพิจารณาค่า Spectral Radius (R_0) ดังนี้

1. $R_0>1$ แสดงว่า โรคมีการระบาดเพิ่มขึ้น (Epidemic)
2. $R_0=1$ แสดงว่า โรคเริ่มเสถียร (Endemic)
3. $R_0<1$ แสดงว่า โรคไม่มีการระบาด

3.1.3 การวิเคราะห์เสถียรภาพ (Stability Analysis) เป็นการหาค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen Value) เพื่ออธิบายคำตอบของสมการเกี่ยวกับค่าความสมดุลสำหรับการตรวจสอบว่าเป็น Local Asymptotically Stable มี 2 กรณี ดังนี้

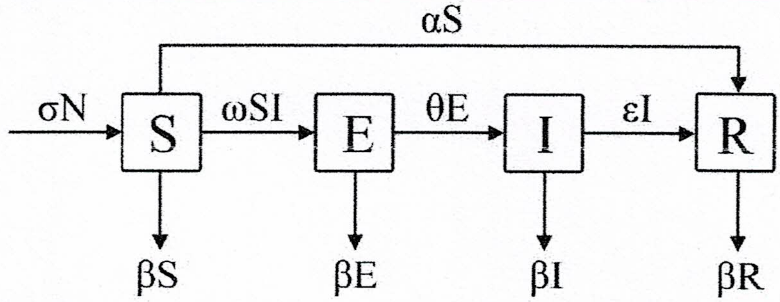
1) Local Asymptotically Stable ณ จุด E_0 ของจุดสมดุลที่ไม่มีโรคโดยการตรวจสอบค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมตริกซ์ ณ สภาวะที่ไม่มีโรค E_0 ซึ่งจะได้สมการลักษณะเฉพาะจาก $\det(J_0-\lambda I)=0, J_0$ คือ จาโคเบียนเมตริกซ์ ณ จุด E_0 โดยมีข้อกำหนดว่า λ ทุกค่าส่วนจริงจะเป็นลบซึ่งจะสอดคล้องตามเงื่อนไขของ Routh-Hurwizt ซึ่งจะส่งผลให้ค่า $R_0<1$

2) Local Asymptotically Stable ณ จุด E_1 ของจุดสมดุลที่มีโรคโดยการตรวจสอบค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมตริกซ์ ณ สภาวะที่มีการแพร่ระบาดของโรค E_1 ซึ่งจะได้สมการลักษณะเฉพาะจาก $\det(J_1-\lambda I)=0, J_1$ คือ จาโคเบียนเมตริกซ์ ณ จุด E_1 โดยมีข้อกำหนดว่า λ ทุกค่าส่วนจริงจะเป็นลบซึ่งจะสอดคล้องตามเงื่อนไขของ Routh-Hurwizt ซึ่งจะส่งผลให้ค่า $R_0>1$

3.2 การวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Numerical Analysis) การวิเคราะห์เชิงตัวเลขเป็นการพิจารณาหาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมที่ทำให้จุดสมดุลที่ ไม่มีโรค (Disease Free Equilibrium Point: E_0) และจุดสมดุลที่เกิดการแพร่ระบาดของโรค (Endemic Equilibrium Point: E_1) ที่ทำให้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นเป็น Local Asymptotically Stable เพื่อนำค่าพารามิเตอร์ไปคำนวณหาคำตอบเชิงตัวเลขโดยจำลอง แบบด้วยโปรแกรม Matlab (สุกัลยา ศรีสุริฉัน, 2559)

4. การสร้างตัวแบบและวิเคราะห์ตัวแบบ

การสร้างและวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐานจากการวิจัยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี โดยการฉีดวัคซีน ในจังหวัดภูเก็ต สามารถสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์โดยผู้วิจัยสนใจศึกษาอัตราการฉีดวัคซีนป้องกันการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี (รูปที่ 2)



รูปที่ 2 แผนภาพตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี โดยการฉีดวัคซีน

เมื่อ S คือ จำนวนคนที่เสี่ยงต่อติดเชื้อโรค
E คือ จำนวนคนที่ติดเชื้อโรคแต่ไม่แสดงอาการ
I คือ จำนวนคนที่ติดเชื้อโรค
R คือ จำนวนคนป่วยที่หายจากโรค
σ คือ อัตราการเกิดใหม่ของประชากรมนุษย์
α คือ อัตราการฉีดวัคซีน
β คือ อัตราการตายของประชากร
ω คือ อัตราการสัมผัสเชื้อ
θ คือ อัตราการฟักตัวของเชื้อ
ε คือ อัตราการหายจากโรค
N คือ จำนวนประชากรมนุษย์ทั้งหมด ในจังหวัดภูเก็ต

จากรูปที่ 2 ผู้วิจัยได้ส่งให้ผู้เชี่ยวชาญที่เกี่ยวข้อง ได้แก่ ผู้ทรงคุณวุฒิทางคณิตศาสตร์และบุคลากรทางการแพทย์ตรวจสอบแผนภาพและสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น หลังจากนั้นจึงได้แก้ไขและปรับปรุงตามข้อเสนอแนะ แล้วนำตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ได้มาวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐาน ได้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น ดังสมการ (5)-(8)

$$\frac{dS}{dt} = \sigma N - \alpha S - \omega SI - \beta S \tag{5}$$

$$\frac{dE}{dt} = \omega SI - \theta E - \beta E \tag{6}$$

$$\frac{dI}{dt} = \theta E - \varepsilon I - \beta I \tag{7}$$

$$\frac{dR}{dt} = \alpha S + \varepsilon I - \beta R \tag{8}$$

โดยที่ $N = S + E + I + R$

4.1 การหาจุดสมดุล (Equilibrium Point)

เนื่องจาก $\dfrac{dX}{dt} = F(X)$ โดยที่ $F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$ และ $X = (S, E, I, R)^t$ กำหนดให้จำนวนประชากรทั้งหมดเป็นค่าคงที่ นั่นคือ $\dfrac{dN}{dt} = 0$ และ $\dfrac{dN}{dt} = \dfrac{dS}{dt} + \dfrac{dE}{dt} + \dfrac{dI}{dt} + \dfrac{dR}{dt}$

ดังนั้น $0 = \sigma N - \beta N$ จะได้ $\sigma = N$

เมื่อกำหนดให้ $\dfrac{dS}{dt} = 0, \dfrac{dE}{dt} = 0, \dfrac{dI}{dt} = 0, \dfrac{dR}{dt} = 0,$ จากสมการ (1), (2), (3) และ (4) จะได้

$$S^* = \frac{\sigma N}{\left(\alpha+\omega I^*+\beta\right)}, E^* = \frac{\omega\sigma N I^*\left(\theta+\beta\right)}{\alpha+\omega I^*+\beta}, I^* = \frac{\theta\omega\sigma N\left(\theta+\beta\right)\left(\varepsilon+\beta\right)-\alpha-\beta}{\omega}, R^* = \frac{\alpha S^*+\varepsilon I^*}{\beta} \quad (5)$$

เสถียรภาพของจุดสมดุลสามารถพิจารณาค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมตริกซ์ จากสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น (1)-(4) สามารถแปลงเป็นจาโคเบียนเมตริกซ์ ได้ดังนี้

$$J = \begin{bmatrix} -\alpha-\omega I-\beta & 0 & -\omega S & 0 \\ \omega I & -\theta-\beta & \omega S & 0 \\ 0 & \theta & -\varepsilon-\beta & 0 \\ \alpha & 0 & \varepsilon & -\beta \end{bmatrix}$$

และพิจารณาค่าลักษณะเฉพาะได้จาก $\det(J-\lambda I_4)=0$ เมื่อ I_4 คือ เมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 4×4

4.1.1 การหาจุดสมดุลไม่มีโรค (Disease Free Equilibrium Point)

กำหนดให้ $E=0$ จะได้ $I=0$ และ $R=0$ จะได้ $S=1$ ดังนั้น $E_0(S,E,I,R)=E_0(1,0,0,0)$ เสถียรภาพของระบบ (Stability of Systems) ที่จุด E_0 โดยหาลักษณะเฉพาะ $\det(J_0-\lambda I_4)=0$ เพื่อหาค่า λ เมื่อ λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen Values) และ I_4 คือ เมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 4×4 ดังนี้

$$J_0 = \begin{bmatrix} -\alpha-\beta & 0 & -\omega S & 0 \\ \omega I & -\theta-\beta & \omega S & 0 \\ 0 & \theta & -\varepsilon-\beta & 0 \\ \alpha & 0 & \varepsilon & -\beta \end{bmatrix}$$

$$\det\left(J_0-\lambda I_4\right) = \begin{bmatrix} -\alpha-\beta-\lambda & 0 & -\omega S & 0 \\ \omega I & -\theta-\beta-\lambda & \omega S & 0 \\ 0 & \theta & -\varepsilon-\beta-\lambda & 0 \\ \alpha & 0 & \varepsilon & -\beta-\lambda \end{bmatrix}$$

จะได้ $\lambda_1 = -\beta$,

$\lambda_2 = -\alpha-\beta$,

$$\lambda_3 = \frac{-2\beta-\varepsilon-\theta-\sqrt{\left(2\beta+\varepsilon+\theta\right)^2-4\left(\beta^2+\varepsilon\beta+\varepsilon\theta+\theta\beta-\theta\omega\right)}}{2}$$

และ $$\lambda_4 = \frac{-2\beta-\varepsilon-\theta+\sqrt{\left(2\beta+\varepsilon+\theta\right)^2-4\left(\beta^2+\varepsilon\beta+\varepsilon\theta+\theta\beta-\theta\omega\right)}}{2}$$

4.1.2 การหาจุดสมดุลที่มีโรค (Disease Equilibrium Point)

กำหนดให้ $E^* \neq 0$ และ $E^* > 0$ จะได้ $E_0 = (S^*,E^*,I^*,R^*)$ เสถียรภาพของระบบ (Stability of Systems) ที่จุด E_1 โดยหาลักษณะเฉพาะ $\det(J_1-\lambda I_4)=0$ เพื่อหาค่า λ เมื่อ λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen Values) และ I_4 คือ เมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 4×4 ดังนี้

$$J_1 = \begin{bmatrix} -\alpha-\omega I-\beta & 0 & -\omega S & 0 \\ \omega I & -\theta-\beta & \omega S & 0 \\ 0 & \theta & -\varepsilon-\beta & 0 \\ \alpha & 0 & \varepsilon & -\beta \end{bmatrix}$$

$$\det\left(J_1 - \lambda I_4\right) = \begin{bmatrix} -\alpha-\omega I-\beta-\lambda & 0 & -\omega S & 0 \\ \omega I & -\theta-\beta-\lambda & \omega S & 0 \\ 0 & \theta & -\varepsilon-\beta-\lambda & 0 \\ \alpha & 0 & \varepsilon & -\beta-\lambda \end{bmatrix}$$

จะได้

$$\lambda_1 = -\beta$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{3}\left(-\alpha-3\beta-\grave{o}-\Theta-\omega I^*\right)+\left(2^{1/3}\left(-\alpha^2+\alpha\grave{o}-\grave{o}^2+\alpha\Theta+\grave{o}\Theta-\Theta^2-3\Theta\omega S^*-2\alpha\omega I^*+\grave{o}\omega I^*+\Theta\omega I^*-\left(\omega I^*\right)^2\right)\right)$$

$$/(3(2\alpha^3-3\alpha^2\grave{o}-3\alpha\grave{o}^2+2\grave{o}^3-3\alpha^2\Theta+12\alpha\grave{o}\Theta-3\grave{o}^2\Theta-3\alpha\Theta^2-3\grave{o}\Theta^2+2\Theta^3-18\alpha\Theta\omega S^*+27\beta\Theta\omega S^*+9\grave{o}\Theta\omega S^*$$

$$+9\Theta\Theta\omega S^*-27\omega\Theta\omega S^*+6\alpha^2\omega I^*-6\alpha\grave{o}\omega I^*-3\grave{o}^2\omega I^*-6\alpha\Theta\omega I^*+12\grave{o}\Theta\omega I^*-3\Theta^2\omega I^*+9\Theta\omega S^*\omega I^*+6\alpha\left(\omega I^*\right)^2$$

$$-3\grave{o}\left(\omega I^*\right)^2-3\Theta\left(\omega I^*\right)^2+2\left(\omega I^*\right)^3+$$

$$\sqrt{}(4\left(-\alpha^2+\alpha\grave{o}-\grave{o}^2+\alpha\Theta+\grave{o}\Theta-\Theta^2-3\Theta\omega S^*-2\alpha\omega I^*+\grave{o}\omega I^*+\Theta\omega I^*-\left(\omega I^*\right)^2\right)^3$$

$$+(2\alpha^3-3\alpha^2\grave{o}-3\alpha\grave{o}^2+2\grave{o}^3-3\alpha^2\Theta+12\alpha\grave{o}\Theta-3\grave{o}^2\Theta-3\alpha\Theta^2-3\grave{o}\Theta^2+2\Theta^3-18\alpha\Theta\omega S^*+27\beta\Theta\omega S^*+$$

$$9\grave{o}\Theta\omega S^*+9\Theta\Theta\omega S^*-27\omega\Theta\omega S^*+6\alpha^2\omega I^*-6\alpha\grave{o}\omega I^*-3\grave{o}^2\omega I^*-6\alpha\Theta\omega I^*+$$

$$12\grave{o}\Theta\omega I^*-3\Theta^2\omega I^*+9\Theta\omega S^*\omega I^*+6\alpha\left(\omega I^*\right)^2-3\grave{o}\left(\omega I^*\right)^2-3\Theta\left(\omega I^*\right)^2+2\left(\omega I^*\right)^3)^2))^{1/3})$$

$$\frac{1}{32^{1/3}}(2\alpha^3-3\alpha^2\grave{o}-3\alpha\grave{o}^2+2\grave{o}^3-3\alpha^2\Theta+12\alpha\grave{o}\Theta-3\grave{o}^2\Theta-3\alpha\Theta^2-3\grave{o}\Theta^2$$

$$+2\Theta^3-18\alpha\Theta\omega S^*+27\beta\Theta\omega S^*+9\grave{o}\Theta\omega S^*+9\Theta\Theta\omega S^*-27\omega\Theta\omega S^*+6\alpha^2\omega I^*-6\alpha\grave{o}\omega I^*-$$

$$3\grave{o}^2\omega I^*-6\alpha\Theta\omega I^*+12\grave{o}\Theta\omega I^*-3\Theta^2\omega I^*+9\Theta\omega S^*\omega I^*+6\alpha\left(\omega I^*\right)^2-3\grave{o}\left(\omega I^*\right)^2-3\Theta\left(\omega I^*\right)^2+2\left(\omega I^*\right)^3+$$

$$\sqrt{}(4\left(-\alpha^2+\alpha\grave{o}-\grave{o}^2+\alpha\Theta+\grave{o}\Theta-\Theta^2-3\Theta\omega S^*-2\alpha\omega I^*+\grave{o}\omega I^*+\Theta\omega I^*-\left(\omega I^*\right)^2\right)^3+$$

$$(2\alpha^3-3\alpha^2\varepsilon-3\alpha\varepsilon^2+2\varepsilon^3-3\alpha^2\theta+12\alpha\varepsilon\theta-3\varepsilon^2\theta-3\alpha\theta^2-3\grave{o}\theta^2+2\theta^3-18\alpha\theta\omega S^*+27\beta\theta\omega S^*+$$

$$9\varepsilon\theta\omega S^*+9\theta\theta\omega S^*-27\omega\theta\omega S^*+6\alpha^2\omega I^*-6\alpha\varepsilon\omega I^*-3\varepsilon^2\omega I^*-6\alpha\theta\omega I^*+12\varepsilon\theta\omega I^*-$$

$$3\theta^2\omega I^*+9\theta\omega S^*\omega I^*+6\alpha\left(\omega I^*\right)^2-3\grave{o}\left(\omega I^*\right)^2-3\theta\left(\omega I^*\right)^2+2\left(\omega I^*\right)^3)^2))^{1/3}$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{3}\left(-\alpha - 3\beta - \varepsilon - \theta - \omega I^*\right) - \left(\left(1 + i\sqrt{3}\right)\left(-\alpha^2 + \alpha\varepsilon - \varepsilon^2 + \alpha\theta + \varepsilon\theta - \theta^2 - 3\theta\omega S^* - 2\alpha\omega I^* + \varepsilon\omega I^* + \theta\omega I^* - \left(\omega I^*\right)^2\right)\right)$$

$$/(32^{2/3}(2\alpha^3 - 3\alpha^2\varepsilon - 3\alpha\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3 - 3\alpha^2\theta + 12\alpha\varepsilon\theta - 3\varepsilon^2\theta - 3\alpha\theta^2$$

$$-3\varepsilon\theta^2 + 2\theta^3 - 18\alpha\theta\omega S^* + 27\beta\theta\omega S^* + 9\varepsilon\theta\omega S^* + 9\theta\theta\omega S^* -$$

$$27\omega\theta\omega S^* + 6\alpha^2\omega I^* - 6\alpha\varepsilon\omega I^* - 3\varepsilon^2\omega I^* - 6\alpha\theta\omega I^* + 12\varepsilon\theta\omega I^* - 3\theta^2\omega I^*$$

$$+9\theta\omega S^*\omega I^* + 6\alpha\left(\omega I^*\right)^2 - 3\varepsilon\left(\omega I^*\right)^2 - 3\theta\left(\omega I^*\right)^2 + 2\left(\omega I^*\right)^3 +$$

$$\sqrt{}(4\left(-\alpha^2 + \alpha\varepsilon - \varepsilon^2 + \alpha\theta + \varepsilon\theta - \theta^2 - 3\theta\omega S^* - 2\alpha\omega I^* + \varepsilon\omega I^* + \theta\omega I^* - \left(\omega I^*\right)^2\right)^3 +$$

$$(2\alpha^3 - 3\alpha^2\varepsilon - 3\alpha\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3 - 3\alpha^2\theta + 12\alpha\theta\varepsilon - 3\varepsilon^2\theta - 3\alpha\theta^2 - 3\varepsilon\theta^2 + 2\theta^3 - 18\alpha\theta\omega S^* + 27\beta\theta\omega S^* +$$

$$9\varepsilon\theta\omega S^* + 9\theta\theta\omega S^* - 27\omega\theta\omega S^* + 6\alpha^2\omega I^* - 6\alpha\varepsilon\omega I^* - 3\varepsilon^2\omega I^* - 6\alpha\theta\omega I^* + 12\varepsilon\theta\omega I^* -$$

$$3\theta^2\omega I^* + 9\theta\omega S^*\omega I^* + 6\alpha\left(\omega I^*\right)^2 - 3\varepsilon\left(\omega I^*\right)^2 - 3\theta\left(\omega I^*\right)^2 + 2\left(\omega I^*\right)^3)^2))^{1/3}) +$$

$$\frac{1}{62^{1/3}}\left(1 - i\sqrt{3}\right)(2\alpha^3 - 3\alpha^2\varepsilon - 3\alpha\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3 - 3\alpha^2\theta + 12\alpha\varepsilon\theta - 3\varepsilon^2\theta - 3\alpha\theta^2 - 3\varepsilon\theta^2 + 2\theta^3$$

$$-18\alpha\theta\omega S^* + 27\beta\theta\omega S^* + 9\varepsilon\theta\omega S^* + 9\theta\theta\omega S^* - 27\omega\theta\omega S^* + 6\alpha^2\omega I^* -$$

$$6\alpha\varepsilon\omega I^* - 3\varepsilon^2\omega I^* - 6\alpha\theta\omega I^* + 12\varepsilon\theta\omega I^* - 3\theta^2\omega I^* + 9\theta\omega S^*\omega I^* + 6\alpha\left(\omega I^*\right)^2 - 3\grave{o}\left(\omega I^*\right)^2 - 3\theta\left(\omega I^*\right)^2 + 2\left(\omega I^*\right)^3 +$$

$$\sqrt{}(4\left(-\alpha^2 + \alpha\varepsilon - \varepsilon^2 + \alpha\theta + \varepsilon\theta - \theta^2 - 3\theta\omega S^* - 2\alpha\omega I^* + \varepsilon\omega I^* + \theta\omega I^* - \left(\omega I^*\right)^2\right)^3 +$$

$$(2\alpha^3 - 3\alpha^2\varepsilon - 3\alpha\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3 - 3\alpha^2\theta + 12\alpha\varepsilon\theta - 3\varepsilon^2\theta - 3\alpha\theta^2 - 3\varepsilon\theta^2 + 2\theta^3 - 18\alpha\theta\omega S^* + 27\beta\theta\omega S^* +$$

$$9\varepsilon\theta\omega S^* + 9\theta\theta\omega S^* - 27\omega\theta\omega S^* + 6\alpha^2\omega I^* - 6\alpha\varepsilon\omega I^* - 3\varepsilon^2\omega I^* - 6\alpha\theta\omega I^* + 12\varepsilon\theta\omega I^*$$

$$-3\theta^2\omega I^* + 9\theta\omega S^*\omega I^* + 6\alpha\left(\omega I^*\right)^2 - 3\varepsilon\left(\omega I^*\right)^2 - 3\theta\left(\omega I^*\right)^2 + 2\left(\omega I^*\right)^3)^2))^{1/3}$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{3}\left(-\alpha-3\beta-\varepsilon-\theta-\omega I^*\right)-\left(\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(-\alpha^2+\alpha\varepsilon-\varepsilon^2+\alpha\theta+\varepsilon\theta-\theta^2-3\theta\omega S^*-2\alpha\omega I^*+\varepsilon\omega I^*+\theta\omega I^*-\left(\omega I^*\right)^2\right)\right)$$

$$/(32^{2/3}(2\alpha^3-3\alpha^2\varepsilon-3\alpha\varepsilon^2+2\varepsilon^3-3\alpha^2\theta+12\alpha\varepsilon\theta-3\varepsilon^2\theta-3\alpha\theta^2$$

$$-3\varepsilon\theta^2+2\theta^3-18\alpha\theta\omega S^*+27\beta\theta\omega S^*+9\varepsilon\theta\omega S^*+9\theta\theta\omega S^*-$$

$$27\omega\theta\omega S^*+6\alpha^2\omega I^*-6\alpha\varepsilon\omega I^*-3\varepsilon^2\omega I^*-6\alpha\theta\omega I^*+12\varepsilon\theta\omega I^*-3\theta^2\omega I^*$$

$$+9\theta\omega S^*\omega I^*+6\alpha\left(\omega I^*\right)^2-3\varepsilon\left(\omega I^*\right)^2-3\theta\left(\omega I^*\right)^2+2\left(\omega I^*\right)^3+$$

$$\sqrt{}(4\left(-\alpha^2+\alpha\varepsilon-\varepsilon^2+\alpha\theta+\varepsilon\theta-\theta^2-3\theta\omega S^*-2\alpha\omega I^*+\varepsilon\omega I^*+\theta\omega I^*-\left(\omega I^*\right)^2\right)^3+$$

$$(2\alpha^3-3\alpha^2\varepsilon-3\alpha\varepsilon^2+2\varepsilon^3-3\alpha^2\theta+12\alpha\theta\varepsilon-3\varepsilon^2\theta-3\alpha\theta^2-3\varepsilon\theta^2+2\theta^3-18\alpha\theta\omega S^*+27\beta\theta\omega S^*+$$

$$9\varepsilon\theta\omega S^*+9\theta\theta\omega S^*-27\omega\theta\omega S^*+6\alpha^2\omega I^*-6\alpha\varepsilon\omega I^*-3\varepsilon^2\omega I^*-6\alpha\theta\omega I^*+12\varepsilon\theta\omega I^*-$$

$$3\theta^2\omega I^*+9\theta\omega S^*\omega I^*+6\alpha\left(\omega I^*\right)^2-3\varepsilon\left(\omega I^*\right)^2-3\theta\left(\omega I^*\right)^2+2\left(\omega I^*\right)^3)^2))^{1/3})+$$

$$\frac{1}{62^{1/3}}\left(1-i\sqrt{3}\right)(2\alpha^3-3\alpha^2\varepsilon-3\alpha\varepsilon^2+2\varepsilon^3-3\alpha^2\theta+12\alpha\varepsilon\theta-3\varepsilon^2\theta-3\alpha\theta^2-3\varepsilon\theta^2+2\theta^3$$

$$-18\alpha\theta\omega S^*+27\beta\theta\omega S^*+9\varepsilon\theta\omega S^*+9\theta\theta\omega S^*-27\omega\theta\omega S^*+6\alpha^2\omega I^*-$$

$$6\alpha\varepsilon\omega I^*-3\varepsilon^2\omega I^*-6\alpha\theta\omega I^*+12\varepsilon\theta\omega I^*-3\theta^2\omega I^*+9\theta\omega S^*\omega I^*+6\alpha\left(\omega I^*\right)^2-3\grave{o}\left(\omega I^*\right)^2-3\theta\left(\omega I^*\right)^2+2\left(\omega I^*\right)^3+$$

$$\sqrt{}(4\left(-\alpha^2+\alpha\varepsilon-\varepsilon^2+\alpha\theta+\varepsilon\theta-\theta^2-3\theta\omega S^*-2\alpha\omega I^*+\varepsilon\omega I^*+\theta\omega I^*-\left(\omega I^*\right)^2\right)^3+$$

$$(2\alpha^3-3\alpha^2\varepsilon-3\alpha\varepsilon^2+2\varepsilon^3-3\alpha^2\theta+12\alpha\varepsilon\theta-3\varepsilon^2\theta-3\alpha\theta^2-3\varepsilon\theta^2+2\theta^3-18\alpha\theta\omega S^*+27\beta\theta\omega S^*+$$

$$9\varepsilon\theta\omega S^*+9\theta\theta\omega S^*-27\omega\theta\omega S^*+6\alpha^2\omega I^*-6\alpha\varepsilon\omega I^*-3\varepsilon^2\omega I^*-6\alpha\theta\omega I^*+12\varepsilon\theta\omega I^*$$

$$-3\theta^2\omega I^*+9\theta\omega S^*\omega I^*+6\alpha\left(\omega I^*\right)^2-3\varepsilon\left(\omega I^*\right)^2-3\theta\left(\omega I^*\right)^2+2\left(\omega I^*\right)^3)^2))^{1/3}$$

4.3 การวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Numerical Analysis)

ผู้วิจัยได้วิเคราะห์เชิงตัวเลขโดยการนำค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการสำรวจข้อมูลเกี่ยวกับการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี ซึ่งมีค่าตามตารางดังนี้

ตารางที่ 1 ค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการสำรวจข้อมูลเกี่ยวกับการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี

ข้อความ	สัญลักษณ์	ค่าพารามิเตอร์	หน่วย
อัตราการเกิดของประชากร	σ	4.81480×10^{-5}	คนต่อวัน
อัตราการฉีดวัคซีน	α	$0-1$	คนต่อวัน
อัตราการเสียชีวิตของประชากร	β	1.77045×10^{-5}	คนต่อวัน
อัตราการสัมผัสเชื้อ	ω	9×10^{-3}	คนต่อวัน
อัตราการฟักตัวของเชื้อ	θ	3.288×10^{-1}	คนต่อวัน
อัตราการหายจากโรค	ε	2.466×10^{-1}	คนต่อวัน
จำนวนประชากรทั้งหมด	N	416581	คน

*สาธารณสุขจังหวัดภูเก็ต

จากสมการลักษณะเฉพาะ (Eigen Value: λ) สมการการหาค่าระดับการติดเชื้อ (Basic Reproductive Number: R_0) และค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมจากตารางข้างต้นจะได้รับคำตอบเป็นค่าลักษณะเฉพาะซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz Criteria และได้ค่าระดับการติดเชื้อได้ (ตารางที่ 2)

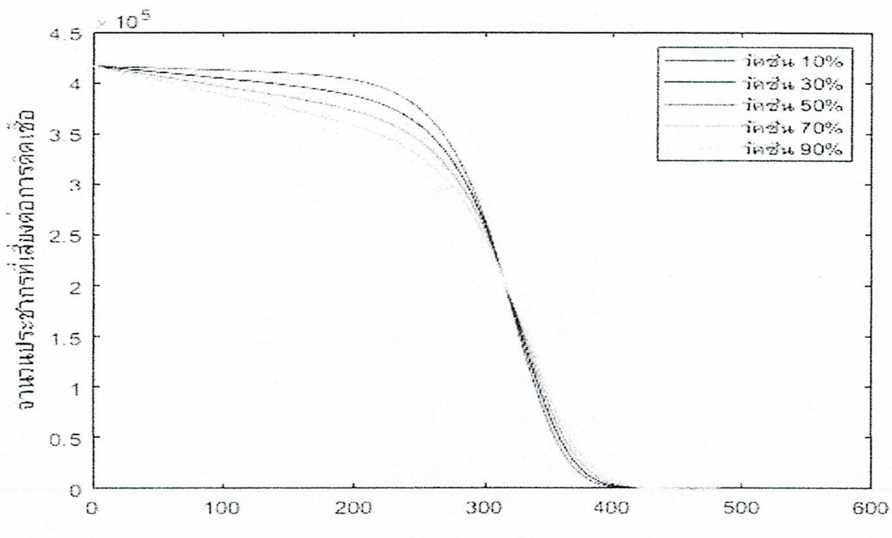
ตารางที่ 2 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าพารามิเตอร์ของอัตราการฉีดวัคซีนป้องกันโรคไวรัสตับอักเสบบี (α) กับค่าระดับการติดเชื้อ (R_0)

อัตราการฉีดวัคซีน (α)	ค่าระดับการติดเชื้อ (R_0)
0.1	7.31805
0.3	2.43964
0.5	1.46381
0.7	1.04559
0.71	1.03086
0.72	1.01655
0.73	1.00262
0.731	1.00125
0.7319	1.00002
0.7320	0.99988
0.9	0.81324
1	0.73192

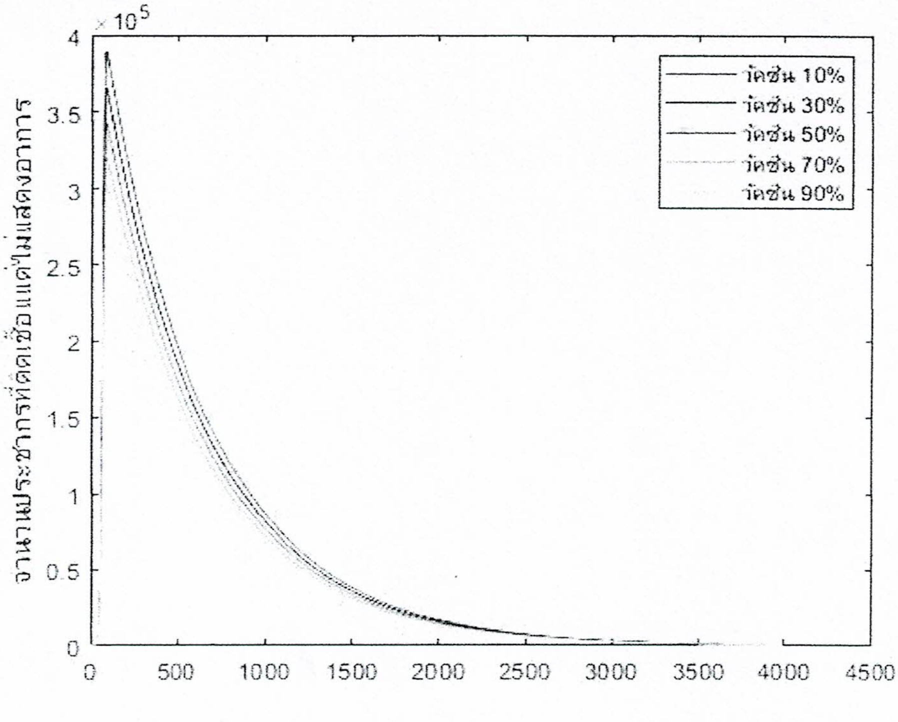
จากตารางที่ 2 พบว่า ค่าอัตราการฉีดวัคซีนป้องกันโรคไวรัสตับอักเสบบี(α) เป็นปัจจัยหนึ่งที่ส่งผลต่อการเปลี่ยนแปลงของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบีโดยการฉีดวัคซีน ในจังหวัดภูเก็ต ซึ่งอัตราการฉีดวัคซีนป้องกันโรคไวรัสตับอักเสบบี(α) มีค่ามากขึ้นส่งผลให้ค่าระดับการติดเชื้อ (R_0) ลดลง

เมื่อพิจารณาเสถียรภาพของระบบ ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรค จะพบว่า ค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda_1 =$-0.0000177045, $\lambda_2 =$-0.740018, $\lambda_3 =$-0.318736, $\lambda_4 =$-0.219538 ซึ่งทุกส่วนจริงมีค่าเป็นลบส่งผลให้คำตอบจะลู่เข้าสู่ $E_0 = (416581,0,0,0)$ ดังนั้นจุดสมดุลไม่มีโรค E_0 จะเป็น Local Asymptotically (Brauer, Driessche, & Wu, 2008)

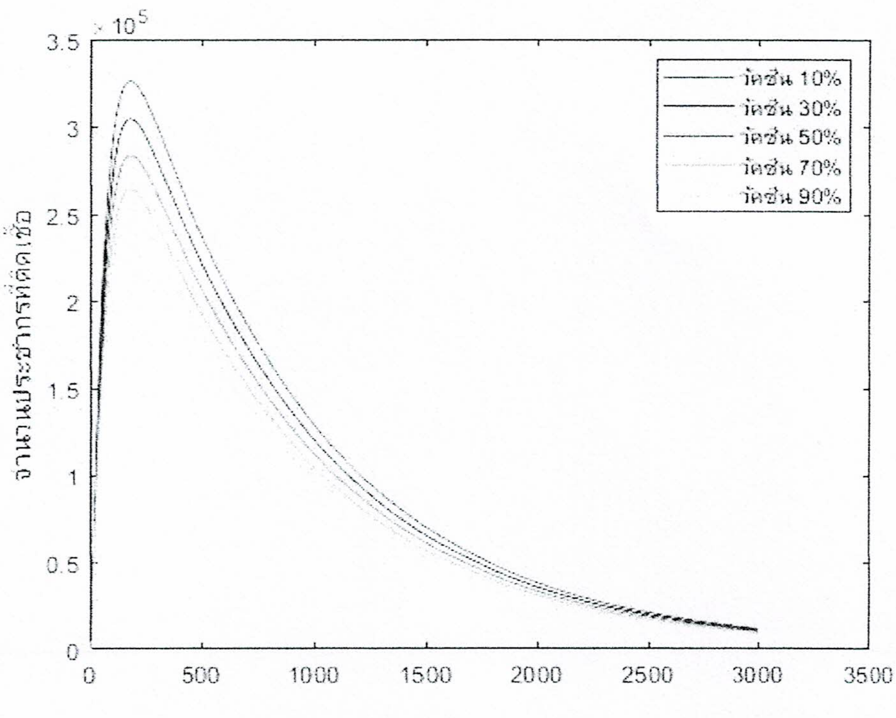
เมื่อพิจารณาเสถียรภาพของระบบ ณ จุดสมดุลที่มีโรค จะพบว่า ค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda_1 =$-0.0000177045, $\lambda_2 =$-17.8327, $\lambda_3 =$-0.109001 จะเป็น Local Asymptotically



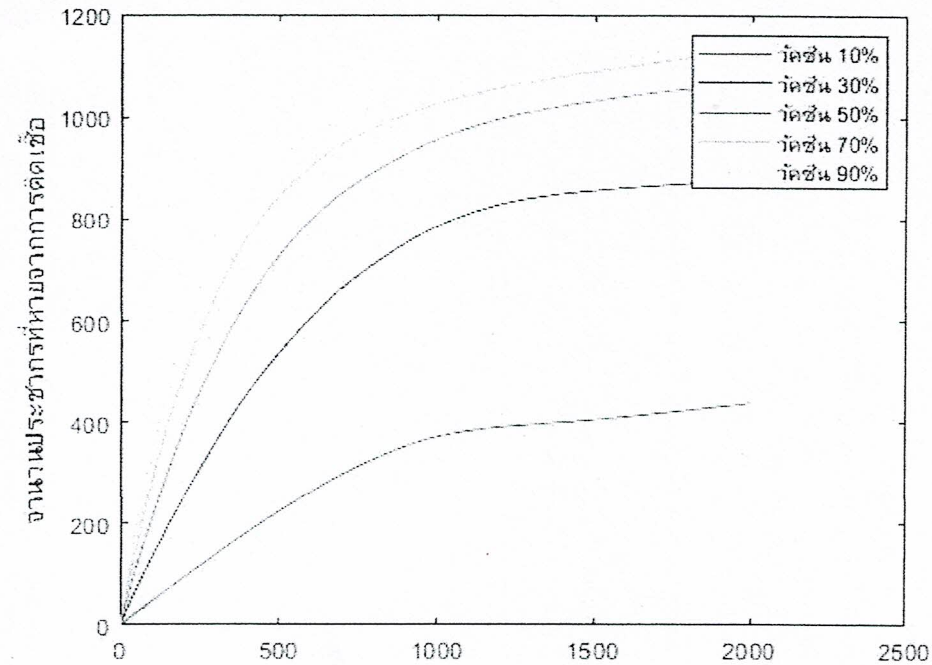
รูปที่ 3 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (S) ณ เวลา t ใด ๆ เมื่อค่า $\Phi =$0.1, 0.3, 0.5, 0.7 และ 0.9 ตามลำดับ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลที่มีโรค



รูปที่ 4 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรที่ติดเชื้อ แต่ไม่แสดงอาการ (E) ณ เวลา t ใด ๆ เมื่อค่า $\Phi =$ 0.1, 0.3, 0.5, 0.7 และ 0.9 ตามลำดับ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลที่มีโรค



รูปที่ 5 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรที่ติดเชื้อ (I) ณ เวลา t ใด ๆ เมื่อค่า $\Phi =$ 0.1, 0.3, 0.5, 0.7 และ 0.9 ตามลำดับ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลที่มีโรค



รูปที่ 6 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรที่หายจากการติดเชื้อ (R) ณ เวลา t ใด ๆ เมื่อค่า $\Phi = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ และ 0.9 ตามลำดับ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลที่มีโรค

ผลการวิจัยและอภิปราย

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการวิจัยในครั้งนี้ คือ ระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น ซึ่งประกอบด้วยประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถแพร่เชื้อได้ ประชากรที่ติดเชื้อและสามารถแพร่เชื้อได้ ประชากรที่หายป่วยจากโรค ซึ่งผู้วิจัยได้เพิ่มค่าพารามิเตอร์อัตราการฉีดวัคซีนป้องกันการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี (α) เป็นปัจจัยสำคัญในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ แล้วใช้วิธีการวิเคราะห์วิธีมาตรฐาน และการวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับตรวจสอบการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี

ผู้วิจัยได้พิจารณาจุดสมดุลที่ไม่มีโรค และจุดสมดุลมีโรค โดยการวิเคราะห์จุดสมดุลและเสถียรภาพของจุดสมดุลด้วยวิธีการวิเคราะห์วิธีมาตรฐาน ซึ่งค่าเสถียรภาพของระบบ Local Asymptotically State ที่ได้ต้องเป็นไปตามเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz เพื่อให้สามารถหาค่าระดับการติดเชื้อ (R_0) ซึ่งมีความจำเป็นภายใต้เงื่อนไข เพื่อให้ Local Asymptotically Stability of Equilibrium State ที่มีเสถียรภาพ ในส่วนของจุดสมดุลไม่มีโรค และจุดสมดุลที่มีโรคที่มีการแพร่ระบาดของโรค โดยที่ $R_0 = \dfrac{\omega\sigma N\theta}{(\theta+\beta)(\varepsilon+\beta)(\alpha+\beta)}$ สามารถพิจารณาค่าระดับการติดเชื้อ (R_0) โดยค่า $R_0 < 1$ วิเคราะห์ได้ว่า ณ จุดสมดุลจะไม่มีโรคจึงไม่เกิดการแพร่ระบาด และค่า $R_0 > 1$ วิเคราะห์ได้ว่า ณ จุดสมดุลมีการติดเชื้อจึงเกิดการแพร่ระบาดของโรค (Sukawat, & Naowarat, 2014) จากการวิเคราะห์ พบว่า จุดทั้งสองเป็น Local Asymptotically State ซึ่งอัตราการฉีดวัคซีนป้องกันการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี $\alpha = 0.1$, 0.3, 0.5, 0.7, 0.71, 0.72, 0.73, 0.731, 0.7319, 0.732, 0.9 และ 1.0 ตามลำดับ จะพบว่า ค่าระดับการติดเชื้อ $R_0 =$ 7.31805, 2.43964, 1.46381, 1.04559, 1.03086, 1.01655, 1.00262, 1.00125, 1.00002, 0.99988, 0.81324 และ 0.73192 ตามลำดับ

จากการวิจัย พบว่า อัตราการฉีดวัคซีนป้องกันการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี (α) เป็นปัจจัยที่ส่งผลต่อการควบคุมการแพร่ระบาดของโรค ซึ่งยังสอดคล้องกับผลงานวิจัยอื่นได้แก่ การวิจัยเรื่องตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ SEIR สำหรับการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคอีสุกอีใสโดยการรณรงค์ให้ความรู้ (อนุวัตร จิรวัฒนพานิช, 2560) พบว่า ประสิทธิภาพการ

รณรงค์ให้ความรู้เป็นปัจจัยที่ส่งผลต่อการควบคุมการแพร่ระบาดของโรค โดยพบว่า ถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีความรู้เกี่ยวกับการป้องกันโรคน้อย จะส่งผลให้เกิดการแพร่ระบาดของโรคเพิ่มขึ้น และถ้าประชากรเสี่ยงต่อการติดเชื้อมีความรู้เกี่ยวกับการป้องกันโรคเป็นจำนวนมากขึ้นจะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคลดลง ซึ่งผลของการวิจัยนี้ พบว่า ถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อไวรัสตับอักเสบบี จำนวนน้อยได้รับวัคซีนป้องกันโรคไวรัสตับอักเสบบี จะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคเพิ่มขึ้น และถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อไวรัสตับอักเสบบี มีจำนวนเพิ่มขึ้นที่ได้รับวัคซีนป้องกันโรคไวรัสตับอักเสบบี จะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคลดลง ดังนั้นสามารถนำผลจากการวิจัยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี โดยการฉีดวัคซีน ในจังหวัดภูเก็ต ใช้เป็นข้อมูลเบื้องต้นในการป้องกันโรคไวรัสตับอักเสบบีเพื่อลดจำนวนผู้ป่วยและใช้เป็นข้อมูลทางวิชาการให้กับหน่วยงานที่เฝ้าระวังของสำนักระบาดวิทยา กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุข รวมทั้งนำเสนอข้อมูลต่อหน่วยงานด้าน สาธารณสุขดำเนินมาตรการควบคุมและป้องกันการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี โดยการฉีดวัคซีนป้องกันโรคไวรัสตับอักเสบบีแก่ประชาชนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ

ข้อเสนอแนะ

1. ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ได้จาการศึกษาในครั้งนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับโรคชนิดอื่น ที่มีลักษณะการแพร่ระบาดของโรคคล้ายกับโรคไวรัสตับอักเสบบีได้

2. สามารถวิจัยและศึกษาองค์ประกอบอื่น ๆ ที่มีผลต่อการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบบี โดยการเพิ่มค่าพารามิเตอร์อื่น ๆ ได้แก่ การรณรงค์ให้ความรู้ การสวมหน้ากากอนามัย เป็นต้น

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณ อาจารย์อนุรักษ์ วีระประเสริฐสกุล ผศ.ดร.บัณฑิตย์ อันยงค์ นายนพดล แก้วมหิทธิ์ ที่ได้ให้คำปรึกษาและข้อมูลเพื่อใช้ในการวิจัย และขอบคุณอาจารย์ในสาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต ที่ให้การสนับสนุน ให้คำปรึกษา และสถานที่ในการดำเนินการจัดทำวิจัยจนสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

เอกสารอ้างอิง

กระทรวงสาธารณะสุขจังหวัดภูเก็ต. (2563). *ไวรัสตับอักเสบ บี.* ขอข้อมูลเมื่อ 9 กันยายน 2563.

เกรียงไกร ราชกิจ. (2557). *การมีเสถียรภาพและค่าเหมาะสมที่สุดของแบบจำลองระบบประสาท.* เชียงใหม่: มหาวิทยาลัยแม่โจ้.

แคทลียา ดวงเกตุ. (2556). 20 *คำถามสำคัญของคณิตศาสตร์* (พิมพ์ครั้งที่ 2). (น. 247-248). กรุงเทพฯ: มติชน.

บัณฑิตย์ อันยงค์. (2558). *ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการแพร่ระบาดของโรคไข้เลือดออกโดยใช้การรณรงค์ให้ความรู้ กรณีศึกษาจังหวัดภูเก็ต.* ภูเก็ต: มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต.

โรงพยาบาลขอนแก่น ราม. (2563). *วัคซีน หลากเรื่องน่ารู้.* ค้นเมื่อ 2 สิงหาคม 2563, จาก http://www.khonkaenram.com/th/services/health-information/health-articles/vaccine.

โรงพยาบาลกรุงเทพ ตราด. (2563). *ไวรัสตับอักเสบภัยเงียบ ก่อมะเร็ง.* ค้นเมื่อ 2 สิงหาคม 2563, จาก https://bth.co.th/th/info-graphic-th/item/1130-hepatitis.html.

โรงพยาบาลสมิติเวชไชน่าทาวน์. (2563). *ไวรัสตับอักเสบบี อันตรายกว่าที่คุณคิด.* ค้นเมื่อ 30 กรกฎาคม 2563, จาก https://www.samitivejchinatown.com/th/health-article/Viral-Hepatitis-B.

สุกัลยา ศรีสุริฉัน. (2559). *การสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์.* ค้นเมื่อ 19 สิงหาคม 2563, จาก http://elearning.nsru.ac.th/web_elearning/math_model/

ศูนย์ข้อมูลโรคติดเชื้อและพาหะนำโรค. (2562). *ไวรัสตับอักเสบ บี.* ค้นเมื่อ 30 กรกฎาคม 2563, จาก https://webdb.dmsc.moph.go.th/ifc_nih/ez.mm_main.asp.

อนุวัตร จิรวัฒนพาณิช, วันชัย ทัพพะปุรณะ และเจษฎา สุจริตธุระการ. (2559ก). ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของไข้หวัดใหญ่โดยการสวมหน้ากากอนามัย. ใน *การประชุมวิชาการระดับชาติมหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา* ครั้งที่ 6, 15-16 สิงหาคม 2559. สงขลา: มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา

อนุวัตร จิรวัฒนาพาณิช, อนุรักษ์ วีระประเสริฐสกุล, สุดาทิพย์ หาญเชิงชัย และจุฑาลักษณ์ ใจอ่อน. (2560). *ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ SEIR สำหรับการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคอิสุกอีใสโดยการรณรงค์ให้ความรู้* (รายงานการวิจัย). ภูเก็ต : มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต

อนุวัตร จิรวัฒนพาณิช. (2562). *ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไวรัสตับอักเสบ บี โดยการรณรงค์ให้ความรู้*. ภูเก็ต: มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต

Brauer, F., Van den Driessche, P, & Wu, J. (Eds) (2008). *Mathematical Epidemiology*. ค้นเมื่อ 19 สิงหาคม 2563, จาก https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-540-78911-6

Sukawat, J., & Naowarat, S. (2014). Effect of Rainfall on the transmission Model of Conjunctivitis. *Advanced in Environmental, Biology, 8*(14), 99-104.