ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคหัดโดยการฉีดวัคซีน ในจังหวัดภูเก็ต

พัชรี จันทร์กุล[1] ดร.อนุรักษ์ วีระประเสริฐสกุล[2]
[1,2]สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาและวิเคราะห์เสถียรภาพของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับควบคุมการแพร่ระบาดของโรคหัด โดยการฉีดวัคซีน ซึ่งวิเคราะห์ตัวแบบตามวิธีมาตรฐาน ได้แก่ ศึกษาจุดสมดุล เสถียรภาพของจุดสมดุลและหาคำตอบเชิงตัวเลขวิเคราะห์ ในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์และตรวจสอบการแพร่ระบาดของโรค ผลการวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคหัด โดยการฉีดวัคซีน ในจังหวัดภูเก็ต (Ω) เป็นปัจจัยที่ส่งผลต่อค่าระดับการติดเชื้อของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งพบว่าถ้าประชากรกลุ่มเสี่ยงต่อการติดเชื้อมีจำนวนน้อย ที่ได้รับวัคซีนป้องกันโรคหัด (Ω) จะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคหัดเพิ่มขึ้น และหากประชากรกลุ่มเสี่ยงต่อการติดเชื้อมีจำนวนที่ได้รับวัคซีนป้องกันโรคหัดเพิ่มขึ้น (Ω) จะส่งผลให้การแพร่กระจายของโรคลดลง
คำสำคัญ: ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์, โรคหัด, ป้องกันการแพร่ระบาดของโรค, การฉีดวัคซีน

Abstract

Objective of this research is to develop and analyze the stability of mathematical models for controlling the spread of measles by vaccination. In which the model was analyzed by using standard analytical methods, study equilibrium point, Stability of equilibrium point and numerical solution analysis. The results of analysis of mathematical models for controlling the spread of measles by vaccination in Phuket. The vaccination (Ω) was a factor affecting the degree of infection of the mathematical model. If a small number population of susceptible who are vaccinated (Ω) will result in a increased spread of measles. If a large population of susceptible who are vaccinated(Ω) will result in a decrease in the spread of the disease.
Keywords: mathematical model, measles, epidemic prevention, vaccination

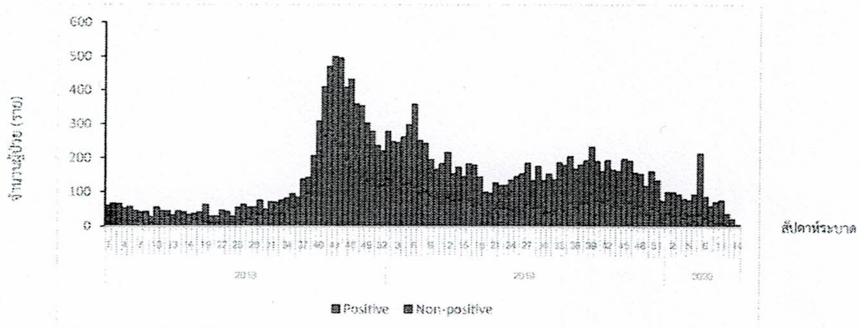
บทนำ

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นวิธีการหนึ่งของการอธิบายสถานการณ์ในชีวิตจริงในแบบภาษาคณิตศาสตร์ โดยการเปลี่ยนสถานการณ์ให้อยู่ในรูปของตัวแปรและสมการ ด้วยการสร้างสมมุติฐานว่าสิ่งใดมีความสำคัญและไม่สนใจรายละเอียดปลีกย่อยบางอย่างที่อาจจะมองข้ามไปได้ และตรวจดูความถูกต้องของกลไกคณิตศาสตร์หนึ่งที่ถูกสร้างขึ้นมาได้เพื่อจะตรวจสอบว่าแบบจำลองนั้นสะท้อนสถานการณ์ในชีวิตจริงหรือไม่ (อนุวัตร จิรวัฒนพาณิช และคณะ, 2560)

โรคหัด (Measles) คือโรคติดเชื้อระบบทางเดินหายใจ ผู้ป่วยจะเกิดผื่นขึ้นตามผิวหนังพร้อมเป็นไข้ร่วมด้วย สามารถแพร่เชื้อและติดต่อกันได้ผ่านทางอากาศหรือการสัมผัสน้ำมูกและน้ำลายของผู้ป่วยโดยตรง แพร่กระจายไปทั่วร่างกาย โรคหัดถือเป็นโรคติดต่อจากคนสู่คน ผู้ที่เสี่ยงในการติดเชื้อไวรัสโรคหัดนั้นมีอยู่หลายกลุ่ม โดยทั่วไปแล้ว เด็กที่ไม่ได้รับวัคซีนป้องกันโรคมักเสี่ยงเป็นโรคดังกล่าว และมีโอกาสเกิดภาวะแทรกซ้อนรุนแรงและเสียชีวิตมากที่สุด โดยเด็กที่ไม่ได้รับสารอาหารจำพวกวิตามินเออย่างเพียงพอจะเสี่ยงต่อการเกิดภาวะแทรกซ้อนที่รุนแรงและเสียชีวิตได้สูง

นอกจากนี้ สตรีมีครรภ์ที่ไม่ได้รับวัคซีนและได้รับเชื้ออาจเสี่ยงต่อการแท้งบุตรหรือคลอดก่อนกำหนดได้ ส่วนผู้ที่มีภูมิคุ้มกันอ่อนแอเนื่องจากภูมิต้านทานถูกทำลายอย่างผู้ป่วยที่ติดเชื้อเอชไอวีและเอดส์ รวมทั้งผู้ที่ขาดสารอาหารนั้น จะป่วยเป็นโรคหัดอย่างรุนแรงเมื่อได้รับเชื้อ (กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุข. 2556)

สถานการณ์โรคหัด ประเทศไทยมีรายงาน ตั้งแต่วันที่ 1 มกราคม ถึง 10 เมษายน 2563 ที่มีผู้ป่วยลักษณะโรคหัดมีอาการไข้และมีผื่นตามร่างกายทั้งสิ้น 1,091 ราย เป็นผู้ป่วยที่ได้รับการยืนยันทางห้องปฏิบัติการ 315 ราย (ร้อยละ 29) และผู้ป่วยที่มีความเชื่อมโยงทางระบาดวิทยา 199 ราย (ร้อยละ 18)



รูปที่ 1 กราฟแสดงจำนวนผู้ป่วยอาการเข้าได้กับโรคหัดจำแนกวันเริ่มป่วยตามสัปดาห์การระบาดประเทศไทย
(วันที่ 1 มกราคม 2561 ถึง 10 เมษายน 2563)

และในจังหวัดภูเก็ตมีผู้ป่วยเป็นโรคหัดอยู่ใน 5 อันดับแรกของประเทศไทย ซึ่งมีอัตราป่วย 6.21 ต่อแสนประชากร จากการสอบสวนโรคพบว่า ผู้ป่วยร้อยละ 80 (866 ราย) ไม่เคยได้รับวัคซีนหรือไม่แน่ใจว่าเคยได้รับวัคซีนมาก่อน ร้อยละ 9 เคยได้รับวัคซีน แต่ไม่ทราบจำนวนครั้ง ร้อยละ 8 เคยได้รับวัคซีน 1 ครั้ง และร้อยละ 3 เคยได้รับวัคซีน 2 ครั้ง (กองระบาดวิทยา,2563)

จากเหตุข้างต้นผู้วิจัยได้ตระหนักและเห็นประโยชน์ที่ได้รับจึงทำการวิจัยเรื่อง ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคหัดโดยการฉีดวัคซีน ซึ่งผู้วิจัยได้เพิ่มตัวแปรอัตราการฉีดวัคซีนเป็นปัจจัยสำหรับการศึกษาในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ เพื่อสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับป้องกันและควบคุมโรคหัดที่มีประสิทธิภาพสูงขึ้น

วัตถุประสงค์การวิจัย

1. เพื่อพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับควบคุมการแพร่ระบาดของโรคหัด โดยการฉีดวัคซีนในจังหวัดภูเก็ต

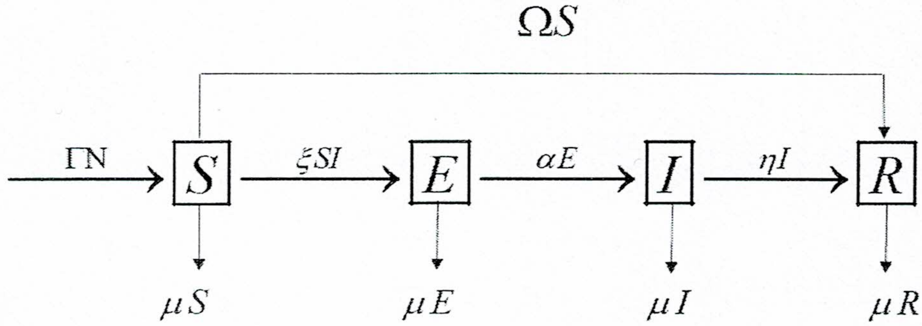
2. เพื่อวิเคราะห์เสถียรภาพของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับควบคุมการแพร่ระบาดของโรคหัด โดยการฉีดวัคซีนในจังหวัดภูเก็ต

วิธีการวิจัย

การดำเนินการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยจะศึกษาและพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการฉีดวัคซีนป้องกันการแพร่ระบาดของโรคหัด โดยดำเนินการตาม 3 ขั้นตอน ดังนี้

1. การพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องในด้านตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ $SEIR$ ซึ่งเป็นตัวแบบคณิตศาสตร์ในการศึกษาการระบาดของโรคที่มีลักษณะผู้ติดเชื้อแต่ไม่แสดงอาการและไม่สามารถแพร่เชื้อไปสู่ผู้อื่นได้ ซึ่งโรคหัดเป็นโรคที่สอดคล้องกับโรคลักษณะดังกล่าว ผู้วิจัยจึงได้สนใจนำตัวแบบนี้มาศึกษาการแพร่ระบาดของโรคหัด โดยมีการศึกษาปัจจัยเพิ่มเติมในด้านการฉีดวัคซีน(Ω) จึงพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ได้ดังแผนภาพต่อไปนี้



รูปที่ 2 ความสัมพันธ์และองค์ประกอบของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคหัด โดยการฉีดวัคซีน

เมื่อ S เป็นจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ณ เวลา t ใด ๆ, E เป็นจำนวนประชากรที่ติดเชื้อ แต่ไม่แสดงอาการ ณ เวลา t ใด ๆ, I เป็นจำนวนประชากรที่ติดเชื้อ ณ เวลา t ใด ๆ, R เป็นจำนวนประชากรที่หายจากการติดเชื้อ ณ เวลา t ใด ๆ Γ เป็นอัตราการเกิดของประชากร, Ω เป็นประสิทธิภาพของการฉีดวัคซีนป้องกันการแพร่ระบาดของโรคหัด, μ เป็นอัตราการเสียชีวิตของประชากร, ξ เป็นอัตราการสัมผัสเชื้อ, α เป็นอัตราการฟักตัวของเชื้อ, η เป็นอัตราการมีภูมิคุ้มกัน, N เป็นจำนวนประชากรทั้งหมด ซึ่งการศึกษาในครั้งนี้ได้กำหนดให้จำนวนประชากรมนุษย์คงที่

2. การตรวจสอบตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

การตรวจสอบความถูกต้องของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ SEIR สำหรับการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคหัด โดยการฉีดวัคซีน ผู้วิจัยได้ให้ผู้เชี่ยวชาญ ทางด้านคณิตศาสตร์ คือ อาจารย์อนุวัตร จิรวัฒนพาณิช อาจารย์สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต และทางการแพทย์ คือ นายนพดล แก้วมหินธ์ หัวหน้าฝ่ายสาธารณสุขและความปลอดภัยเทศบาล จึงได้สมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้นตามข้อเสนอแนะจากผู้เชี่ยวชาญดังนี้

$$\frac{dS}{dt} = \Gamma N - \Omega S - \mu S - \xi SI \qquad (1)$$

$$\frac{dE}{dt} = \xi SI - \mu E - \alpha E \qquad (2)$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha E - \mu I - \eta I \qquad (3)$$

$$\frac{dR}{dt} = \eta I + \Omega S - \mu R \qquad (4)$$

โดยที่ $N = S + E + I + R \qquad (5)$

3. การวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

การวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เป็นการวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐาน (standart method) โดยศึกษาจุดสมดุลและศึกษาเสถียรภาพของจุดสมดุลเพื่อหาเงื่อนไขของพารามิเตอร์ที่เหมาะสมของจุดสมดุล หาค่าระดับการติดเชื้อโดยใช้วิธี Next Generation Method หาคำตอบเชิงวิเคราะห์และคำตอบเชิงตัวเลข โดยวิธี Numerical Analysis ดังวิธีการต่อไปนี้

3.1 การวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐาน (standart method)

การวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐานเป็นการศึกษาจุดสมดุล เสถียรภาพของระบบ และค่าระดับการติดเชื้อ ดังนี้

3.1.1 จุดสมดุล (Equilibrium point) และการวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบ (Stability Analysis)

การหาจุดสมดุลดำเนินการโดยจัดสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ให้เท่ากับศูนย์ คือ $\frac{dS}{dt}=0, \frac{dE}{dt}=0, \frac{dI}{dt}=0, \frac{dR}{dt}=0$ จะได้

$$S=\frac{\Gamma N}{(\Omega+\mu+\xi I)} \quad (6)$$

$$E=\frac{\xi SI}{\mu+\alpha} \quad (7)$$

$$I=\frac{\alpha E}{\mu+\eta} \quad (8)$$

$$R=\frac{\eta I+\Omega S}{\mu} \quad (9)$$

จากสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น (1)-(4) สามารถแปลงเป็นจาโคเบียนเมทริกซ์ ได้ดังนี้

$$J=\begin{bmatrix} -\Omega-\mu-\xi I & 0 & -\xi S & 0 \\ \xi I & -\mu-\alpha & \xi S & 0 \\ 0 & \varepsilon & -\mu-\eta & 0 \\ \Omega & 0 & \eta & -\mu \end{bmatrix}$$

3.1.1.1 การหาจุดสมดุลไม่มีโรค (Disease Free Equilibrium Point)

จาก (6)-(9) กำหนดให้ $E=0$ ในสมการที่ (8) จะได้ $I=0$ และแทน $I=0$ ในสมการที่ (6)และ (9) จะได้ $S=\frac{\Gamma N}{\Omega+\mu}$ และ $R=\frac{\Omega S}{\mu}$ ตามลำดับ ดังนั้น $E_0(S,E,I,R)=E_0\left(\frac{\Gamma N}{\Omega+\mu},0,0,\frac{\Omega S}{\mu}\right)$ เสถียรของระบบ (Stability of Systems) ที่จุด E_0 โดยดำเนินการหาสมการลักษณะเฉพาะ $\det(J_0-\lambda I)=0$ เพื่อหาค่า λ เมื่อ λ เป็นค่าลักษณะพาะ (Eigen Values) และ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 4×4

$$J_0 = \begin{bmatrix} -\Omega-\mu & 0 & -\xi S & 0 \\ 0 & \mu-\alpha & \xi S & 0 \\ 0 & \alpha & -\mu-\eta & 0 \\ \Omega & 0 & \eta & -\mu \end{bmatrix}$$

$$|J(E_0)-\lambda I| = \begin{bmatrix} -\Omega-\mu-\lambda & 0 & -\xi S & 0 \\ 0 & \mu-\alpha-\lambda & \xi S & 0 \\ 0 & \alpha & -\mu-\eta-\lambda & 0 \\ \Omega & 0 & \eta & -\mu-\lambda \end{bmatrix}$$

จะได้ $\lambda_1 = -\mu \,, \lambda_2 = -\Omega-\mu \,, \lambda_3 = \lambda = \dfrac{-2\mu-\eta-\alpha+\sqrt{4\mu^2+\eta^2+\alpha^2-2\eta\alpha+4S\alpha\xi}}{2}$

และ $\lambda_4 = \lambda = \dfrac{-2\mu-\eta-\alpha-\sqrt{4\mu^2+\eta^2+\alpha^2-2\eta\alpha+4S\alpha\xi}}{2}$

3.1.1.2 การหาจุดสมดุลที่มีโรค (Disease Equilibrium Point)

และจากระบบสมการ (6) – (9)

จะได้

$$S^* = \frac{\Gamma N}{\Omega+\mu+\xi I^*} \tag{10}$$

$$E^* = \frac{\xi\Gamma N I^*(\mu+\alpha)}{\Omega+\mu+\xi I^*} \tag{11}$$

$$I^* = \frac{\alpha\xi\Gamma N(\mu+\alpha)(\mu+\eta)-\Delta-\mu}{\xi} \tag{12}$$

$$R^* = \frac{\eta I^*\mu+\Omega\Gamma N\mu}{\Omega+\mu+\xi I^*} \tag{13}$$

จาก (10)-(13) กำหนดให้ $E^* \neq 0$ และ $E^* > 0$ จะได้ $E_0 = (S^*, E^*, I^*, R^*)$ เสถียรภาพของระบบ (Stability of Systems) ที่จุด E_1 โดยดำเนินการหาลักษณะเฉพาะ $\det(J_1 - \lambda I_4) = 0$ เพื่อหาค่า λ เมื่อ λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen Values) และ I_4 คือเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 4×4 ดังนี้

$$J_1 = \begin{bmatrix} -\Omega-\xi I^* & 0 & -\xi S & 0 \\ \xi I^* & (-\mu-\alpha) & \xi S & 0 \\ 0 & \alpha & -\mu-\eta & 0 \\ \Omega & 0 & \eta & -\mu \end{bmatrix}$$

$$|J(E_1)-\lambda I| = \begin{bmatrix} -\Omega-\xi I^*-\lambda & 0 & -\xi S & 0 \\ \xi I^* & (-\mu-\alpha)-\lambda & \xi S & 0 \\ 0 & \alpha & -\mu-\eta-\lambda & 0 \\ \Omega & 0 & \eta & -\mu-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det\left(J(E_1)-\lambda I\right)=\begin{bmatrix} -\Omega-\xi I^*-\lambda & 0 & -\xi S & 0 \\ \xi I^* & (-\mu-\alpha)-\lambda & \xi S & 0 \\ 0 & \alpha & -\mu-\eta-\lambda & 0 \\ \Omega & 0 & \eta & -\mu-\lambda \end{bmatrix}=0$$

ดังนั้น λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen Values) โดยหาได้จากสมการลักษณะเฉพาะจากสมการ

$$\lambda^4+a_1\lambda^3+a_2\lambda^2+a_3\lambda+a_4=0$$

โดยที่

$$a_1=3\mu+\eta+\Omega+\xi I^*+\alpha$$

$$a_2=3\mu^2+3\Omega\mu+3\xi I^*\mu+2\alpha\mu+\Omega\eta+\xi I^*\eta+2\mu\eta+\alpha\eta+\Omega\alpha+\xi I^*\alpha-\xi S^*\alpha$$

$$a_3=3\mu^2\Omega+2\mu^2\xi I^*+\mu^3+\alpha\mu^2+2\Omega\eta\mu+\xi I^*\eta\mu+\mu^2\eta+\alpha\eta\mu+2\Omega\alpha\mu$$
$$+2\xi I^*\alpha\mu-\xi S^*\alpha\mu+\mu\xi I^*+\Omega\alpha\eta+\xi I^*\alpha\eta-\Omega\alpha\xi S^*-(\xi I^*)(\xi S^*)\alpha$$

$$a_4=\Omega\mu^3+\Omega\alpha\mu^2+\mu^3\xi I^*+\mu^2\alpha\xi I^*+\Omega\mu^2\eta+\Omega\alpha\eta\mu+\xi I^*\mu^2\eta+\xi I^*\alpha\eta\mu$$
$$+\Omega\alpha\xi S^*\mu-(\xi I^*)(\xi S^*)\alpha\mu$$

จะได้ว่า $a_1>0, a_3>0, a_4>0, a_1a_2a_3>a_3^2+a_1^2a_4$

นั่นคือสมการ $\lambda^4+a_1\lambda^3+a_2\lambda^2+a_3\lambda+a_4=0$ สอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz

3.1.2 การหาค่าระดับการติดเชื้อ (Basic Reproductive Number: R_0)

ค่าระดับการติดเชื้อเป็นค่าเฉลี่ยที่ผู้ป่วยหนึ่งคนสามารถทำให้คนกลุ่มเสี่ยงป่วยเป็นจำนวนกี่คนในช่วงเวลาที่เขายังป่วยอยู่ โดยใช้วิธีการ Next Generation Method โดยจัดการสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นในรูป $\frac{dX}{dt}=F(X)-V(X)$ เพื่อหาค่า R_0 จากเมตริกซ์ $\rho(FV^{-1})$ ซึ่ง $F(X)$ คือเมตริกซ์ของผู้ป่วยที่เพิ่มขึ้น, $V(X)$ คือ เมตริกซ์ของผู้ป่วยที่เปลี่ยนสถานะจากกลุ่มหนึ่งไปอีกกลุ่มหนึ่ง ได้จากอนุพันธ์ย่อย (Partial Derivative) ดังนี้

$$X=\begin{bmatrix} S \\ E \\ I \\ R \end{bmatrix},\quad F=\left[\frac{\partial F_i(E_0)}{\partial X_i}\right] \text{ และ } V=\left[\frac{\partial V_i(E_0)}{\partial X_i}\right]$$

จะได้

$$X=\begin{bmatrix} S \\ E \\ I \\ R \end{bmatrix},\quad F(X)=\begin{bmatrix} 0 \\ \xi SI \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad V(X)=\begin{bmatrix} -\Gamma N+\Omega S+\mu S+\xi SI \\ \mu E+\alpha E \\ -\alpha E+\mu I+\eta I \\ -\eta S-\Omega I+\mu R \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$FV^{-1}(E_0)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\xi N\alpha}{(\mu+\alpha)(\mu+\eta)} & \frac{\xi N}{(\mu+\eta)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จะได้
$$R_0 = \rho(FV^{-1}(E_0)) = \frac{\xi N\alpha}{(\mu+\alpha)(\mu+\eta)}$$

โดยพิจารณา R_0 ดังนี้

1. $R_0 > 1$ แสดงว่า โรคมีการระบาดเพิ่มขึ้น (Epidemic)
2. $R_0 = 1$ แสดงว่า โรคเริ่มเสถียร (Endemic)
3. $R_0 < 1$ แสดงว่า โรคไม่มีการระบาด

3.2 การวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Numerical Analysis)

การวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ทำการวิเคราะห์เชิงตัวเลขโดยการนำค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการสำรวจข้อมูลเกี่ยวกับการแพร่ระบาดของโรคหัด ซึ่งมีค่าตามตารางดังนี้

ตารางที่ 1 ค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการสำรวจข้อมูลเกี่ยวกับการแพร่ระบาดของโรคหัด

ข้อความ	สัญลักษณ์	ค่าพารามิเตอร์	หน่วย
อัตราการเกิดของประชากร	Γ	4.81480×10^{-5}	คนต่อวัน
อัตราการฉีดวัคซีน	Ω	$0-1$	คนต่อวัน
อัตราการเสียชีวิตของประชากร	μ	1.77044×10^{-5}	คนต่อวัน
อัตราการสัมผัสเชื้อ	ξ	0.0006577×10^{-7}	คนต่อวัน
อัตราการฟักตัวของเชื้อ	α	0.00000940×10^{-8}	คนต่อวัน
อัตราการหายจากโรค	η	0.00000658×10^{-8}	คนต่อวัน
จำนวนประชากรทั้งหมด	N	416582	คน

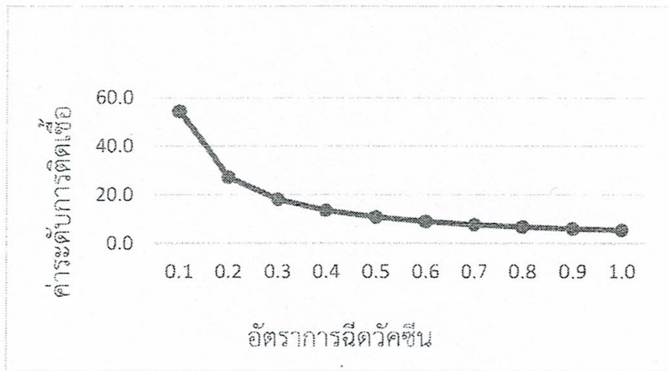
*สาธารณสุขจังหวัดภูเก็ต

จากสมการลักษณะเฉพาะ (Eigen Value: λ) สมการการหาค่าระดับการติดเชื้อ (Basic Reproductive Number: R_0) และค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมจากตารางข้าวต้นจะได้รับคำตอบเป็นค่าลักษณะเฉพาะซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz Criteria และได้ค่าระดับการติดเชื้อได้ดังจารางที่ 2 ดังนี้

ตารางที่ 2 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าพารามิเตอร์ของอัตราการฉีดวัคซีนป้องกันโรคหัด (Ω) กับค่าระดับการติดเชื้อ (R_0)

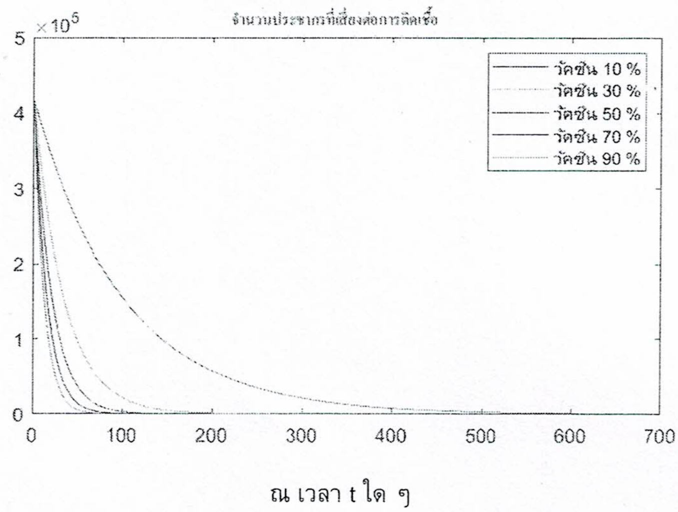
อัตราการฉีดวัคซีน (Ω)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
ค่าระดับการติดเชื้อ (R_0)	14.30	7.15	4.77	3.58	2.86	2.38	2.04	1.79	1.59	1.43

จากตารางที่ 2 พบว่าค่าอัตราการฉีดวัคซีนป้องกันโรคหัด (Ω) เป็นปัจจัยหนึ่งที่ส่งผลต่อการเปลี่ยนแปลงของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคหัด โดยการฉีดวัคซีน ในจังหวัดภูเก็ต ซึ่งอัตรา การฉีดวัคซีนป้องกันโรคหัด (Ω) มีค่ามากขึ้นส่งผลให้ค่าระดับการติดเชื้อ (R_0) ลดลง และแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราการฉีดวัคซีนป้องกันโรคหัด (Ω) กับ ค่าระดับการติดเชื้อ (R_0) ดังนี้

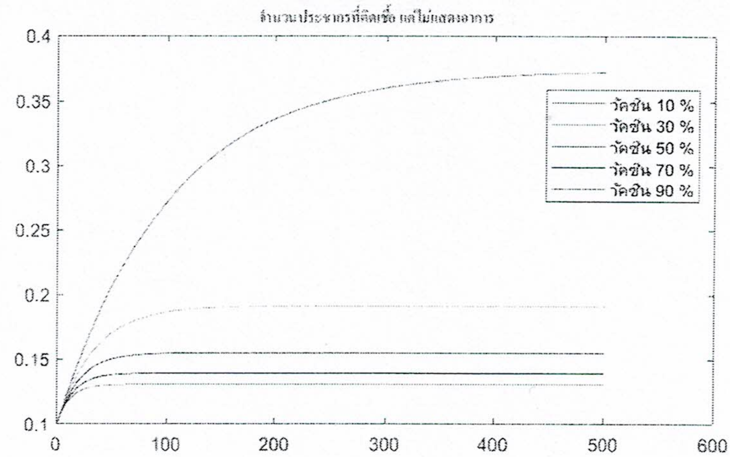


รูปที่ 3 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าพารามิเตอร์ของอัตราการฉีดวัคซีนป้องกันโรคหัดกับค่าระดับการติดเชื้อ

เมื่อพิจารณาเสถียรภาพของระบบ ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรค จะพบว่าค่าลักษณะเฉพาะทุกค่ามีส่วนจริงเป็นค่าลบ และสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Roouth-Huewitz ส่งผลให้คำตอบจะลู่เข้าสู่จุด $E_0 = (416,582,0,0,0)$ ดังนั้นจุดสมดุลไม่มีเชื้อ $E_0 = (416,582,0,0,0)$ จะเป็น Local asymptotically ดังรูป

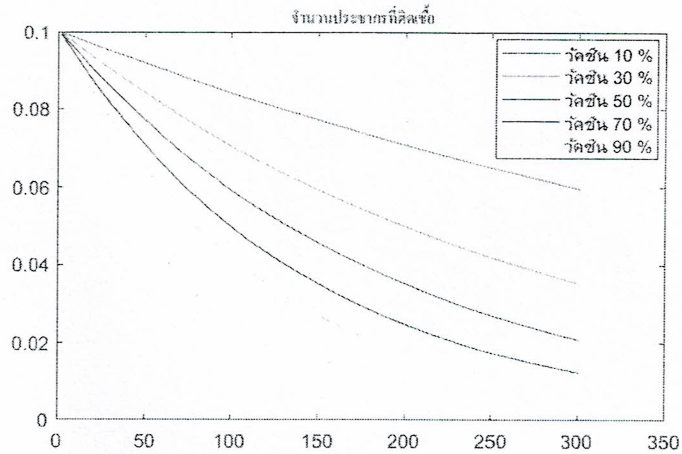


รูปที่ 4 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (S) ณ เวลา t ใด ๆ เมื่อค่า $\Omega =$ 0.1, 0.3, 0.5, 0.7 และ 0.9 ตามลำดับ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลที่มีโรค



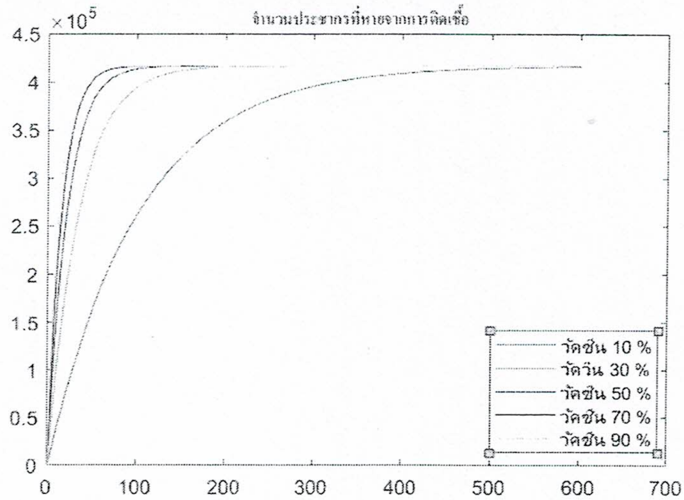
ณ เวลา t ใด ๆ

รูปที่ 5 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรที่ติดเชื้อ แต่ไม่แสดงอาการ (E) ณ เวลา t ใด ๆ เมื่อค่า $\Omega =$ 0.1, 0.3, 0.5, 0.7 และ 0.9 ตามลำดับ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลที่มีโรค



ณ เวลา t ใด ๆ

รูปที่ 6 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรที่ติดเชื้อ (I) ณ เวลา t ใด ๆ เมื่อค่า $\Omega =$ 0.1, 0.3, 0.5, 0.7 และ 0.9 ตามลำดับ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลที่มีโรค



ณ เวลา t ใด ๆ

รูปที่ 7 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรที่หายจากการติดเชื้อ (R) ณ เวลา t ใด ๆ เมื่อค่า $\Omega =$ 0.1, 0.3, 0.5, 0.7 และ 0.9 ตามลำดับ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลที่มีโรค

จากการศึกษาพบว่าอัตราการฉีดวัคซีนป้องกันการแพร่ระบาดของโรคหัดเป็นปัจจัยที่ส่งผลต่อการเปลี่ยนแปลงของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคหัด โดยการฉีดวัคซีน ในจังหวัดภูเก็ต โดยพบว่าถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อโรคหัด ได้รับวัคซีนป้องกันโรคหัดน้อย จะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคเพิ่มขึ้น และถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อโรคหัด ได้รับวัคซีนป้องกันโรคหัดเพิ่มขึ้น จะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคลดลง

ผลการวิจัยและอภิปรายผลการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคหัด โดยการฉีดวัคซีน เพื่อพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคหัด ในการป้องกันโรค และลดจำนวนผู้ป่วย

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการวิจัยในครั้งนี้ คือ ระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น ซึ่งประกอบด้วยประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถแพร่เชื้อได้ ประชากรที่ติดเชื้อและสามารถแพร่เชื้อได้ ประชากรที่หายป่วยจากโรค ซึ่งผู้วิจัยได้เพิ่มค่าพารามิเตอร์อัตราการฉีดวัคซีนป้องกันการแพร่ระบาดของโรคหัด (Ω) เป็นปัจจัยสำคัญในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ แล้วใช้วิธีการวิเคราะห์วิธีมาตรฐาน และการวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับตรวจสอบการแพร่ระบาดของโรคหัด

ผู้วิจัยได้พิจารณาจุดสมดุลที่ไม่มีโรค และจุดสมดุลมีโรค โดยการวิเคราะห์จุดสมดุลและเสถียรภาพของจุดสมดุลด้วยวิธีการวิเคราะห์วิธีมาตรฐาน ซึ่งค่าเสถียรภาพของระบบ Local Asymptotically State ที่ได้ต้องเป็นไปตามเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz เพื่อให้สามารถหาค่าระดับการติดเชื้อ (R_0) ซึ่งมีความจำเป็นภายใต้เงื่อนไข เพื่อให้ Local Asymptotically Stability of Equilibrium State ที่มีเสถียรภาพ ในส่วนของจุดสมดุลไม่มีโรค และจุดสมดุลที่มีโรคที่มีการแพร่ระบาดของโรค

โดยที่ $R_0 = \frac{\xi N\alpha}{(\mu+\alpha)(\mu+\eta)}$ สามารถพิจารณาค่าระดับการติดเชื้อ (R_0) โดยค่า $R_0 < 1$ วิเคราะห์ได้ว่า ณ จุดสมดุลจะไม่มีโรคจึงไม่เกิดการแพร่ระบาด และค่า $R_0 > 1$ วิเคราะห์ได้ว่า ณ จุดสมดุลมีการติดเชื้อจึงเกิดการแพร่ระบาดของโรค (Jantapron Sukawat and Surapol Naowarat, 2014) จากการวิเคราะห์พบว่าจุดทั้งสองเป็น Local Asymptotically State ซึ่งอัตราการฉีดวัคซีนป้องกันการแพร่ระบาดของโรคหัด $\Omega =$ 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 และ 1.0 ตามลำดับ จะพบว่าค่าระดับการติดเชื้อ $R_0 =$ 14.30,7.15,4.77,3.58,2.86,2.38,2.04,1.79,1.59และ 1.43 ตามลำดับ

จากการวิจัยพบว่าอัตราการฉีดวัคซีนป้องกันการแพร่ระบาดของโรคหัด (Ω) เป็นปัจจัยที่ส่งผลต่อการเปลี่ยนแปลงของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคหัด โดยการฉีดวัคซีน ในจังหวัดภูเก็ต โดยพบว่าถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อโรคหัด ได้รับวัคซีนป้องกันโรคหัดน้อยจะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคเพิ่มขึ้น และถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อโรคหัด ได้รับวัคซีนป้องกันโรคหัดเพิ่มขึ้นจะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคลดลง ดังนั้นสามารถนำผลจากการวิจัยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคหัด โดยการฉีดวัคซีน ในจังหวัดภูเก็ต ใช้เป็นข้อมูลเบื่องต้นในการป้องกันโรคหัดเพื่อลดจำนวนผู้ป่วยและใช้เป็นข้อมูลทางวิชาการให้กับหน่วยงานที่เฝ้าระวังของสำนักระบาดวิทยา กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุข รวมทั้งนำเสนอข้อมูลต่อหน่วยงานด้าน สาธารณสุขดำเนินมาตรการควบคุมและป้องกันการแพร่ระบาดของโรคหัด โดยการฉัดวัคซีนป้องกันโรคหัดแก่ประชาชนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ

ข้อเสนอแนะ

1. ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ได้จากการศึกษาในครั้งนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้กันโรคชนิดอื่น ที่มีลักษณะการแพร่ระบาดของโรคคล้ายกับโรคหัดได้
2. สามารถวิจัยและศึกษาองค์ประกอบอื่น ๆ ที่มีผลต่อการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคหัด โดยการเพิ่มค่าพารามิเตอร์อื่น ๆ ได้แก่ การรณรงค์ให้ความรู้ การสวมหน้ากากอนามัย เป็นต้น

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณ ดร.อนุรักษ์ วีระประเสริฐสกุล ที่ได้ให้คำปรึกษาและให้ข้อมูลเพื่อใช้ในการวิจัย อาจารย์อนุวัตร จิรวัฒนพาณิช และนายนพดล แก้วมหินธ์ ผู้ตรวจสอบความถูกต้องของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ SEIR สำหรับการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคหัด โดยการฉีดวัคซีน และขอบคุณอาจารย์ในสาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต ที่ให้การสนับสนุน ให้คำปรึกษา และสถานที่ในการดำเนินการจัดทำวิจัยจนสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

เอกสารอ้างอิง

กรมควบคุมโรค. (2561). **โรคหัด (Measles)**. ค้นเมื่อ 19 สิงหาคม 2563,จาก. www.boe.moph.go.th/fact/Measles.htm

กองโรคติดต่อทั่วไป. (2563). **สถานการณ์โรคหัด**. ค้นเมื่อ 19 สิงหาคม 2563, จาก https://ddc.moph.go.th/uploads/files/1426620200814091118.pdf

สุกัลยา ศรีสุริฉัน. (2559). **การสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์**. ค้นเมื่อ 19 สิงหาคม 2563, จาก http://elearning.nsru.ac.th/web_elearning/math_model/

อนุวัตร จิรวัฒนพาณิชและคณะ. (2560). **ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ SEIR สำหรับการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคอิสุกอิใสโดยการรณรงค์ให้ความรู้**. รายงานการวิจัย มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต, ภูเก็ต.

เอกพงษ์ บุญเซ็น. (2554). **แบบจำลอง SIR สำหรับการย้ายถิ่นของประชากรหนึ่งกลุ่ม**. รายงานการวิจัย มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์, กรุงเทพมหานคร.

Fred Brauer, Pauline den Driessche and Jianhong Wu. (2008). **Mathematical Epidemiology**. ค้นเมื่อ 19 สิงหาคม 2563, จาก https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-540-78911-6.

Jantapron Sukawat and Surapol Naowarat. (2014). **Effect of Rainfall on the transmission Model of Conjunctivitis**. Advanced in Environmental ,Biology, 8(14) : 99-104.

Kermack and McKendrick. (1927). **A contribution to the mathematical theory of epidemics**. ค้นเมื่อ 19 สิงหาคม 2563, จาก https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspa.1927.0118.