

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่

โดยการฉีดวัคซีน ในจังหวัดภูเก็ต

วัชรพงษ์ แก้วรัตน์¹ ออนุวัตร จิรวินพนพานิช²

¹นักศึกษานิเทศศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต

²อาจารย์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่ โดยการฉีดวัคซีน ในจังหวัดภูเก็ต วิเคราะห์ตัวแบบโดยใช้วิธีมาตรฐาน ศึกษาจุดสมดุล ศึกษาเสถียรภาพของจุดสมดุล หาค่าตอบเชิงวิเคราะห์ ศึกษาอัตราการฉีดวัคซีนป้องกันการแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่ ในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ และหาค่าตอบเชิงตัวเลข ผลการวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่ โดยการฉีดวัคซีน ในจังหวัดภูเก็ต (Φ) เป็นปัจจัยที่ส่งผลต่อค่าระดับการติดเชื้อของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งอัตราการฉีดวัคซีนป้องกันการแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่ (Φ) มีค่ามากขึ้นส่งผลให้ค่าระดับการติดเชื้อลดลงและยังพบว่าถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ได้รับวัคซีนป้องกันโรคไข้หวัดใหญ่ (Φ) น้อย จะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่เพิ่มขึ้น และถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ได้รับการฉีดวัคซีนป้องกันโรคไข้หวัดใหญ่ (Φ) เป็นจำนวนมากขึ้น จะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคลดลง

คำสำคัญ: ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์, โรคไข้หวัดใหญ่, ป้องกันการแพร่ระบาดของโรค, การฉีดวัคซีน

Abstract

This research aimed to study and develop a mathematical model of influenza epidemic control. By vaccination In Phuket The model was analyzed using standard methods. Study the balance point Study the stability of the equilibrium Find analytical answers Study the vaccination rate against the spread of influenza. In the mathematical model And find numerical answers. The results of mathematical analysis of influenza epidemic control. By vaccination In Phuket, (Φ) was a factor affecting the degree of infection of the mathematical model. The rate of vaccination against the spread of influenza (Φ) was higher, resulting in lower infection levels and that if the population at risk of infection Getting the flu vaccine (Φ) less will result in an increased flu epidemic. And if the population at risk of infection is getting more and more influenza vaccinations (Φ). Will reduce the epidemic

Keywords: Mathematical model, Influenza, Epidemic prevention, Vaccination

บทนำ

คณิตศาสตร์ได้เข้ามามีบทบาทเกี่ยวข้องกับในการดำรงชีวิตของมนุษย์ สามารถนำมาประยุกต์ใช้ได้หลากหลาย โดยเฉพาะทางการแพทย์ คณิตศาสตร์สามารถประยุกต์ใช้เพื่อจำลองการเกิดโรคและการควบคุม โรคต่าง ๆ รวมทั้งเป็นเครื่องมือช่วยทำความเข้าใจเกี่ยวกับสุขภาพหลาย ๆ ด้าน อาทิ สภาพแวดล้อมที่ทำให้เกิดโรคต่าง ๆ การป้องกันโรค การทดสอบปริมาณยา เป็นต้น ปัจจุบันการเปลี่ยนแปลงของสภาพภูมิอากาศและสิ่งแวดล้อม เป็นสาเหตุที่ทำให้

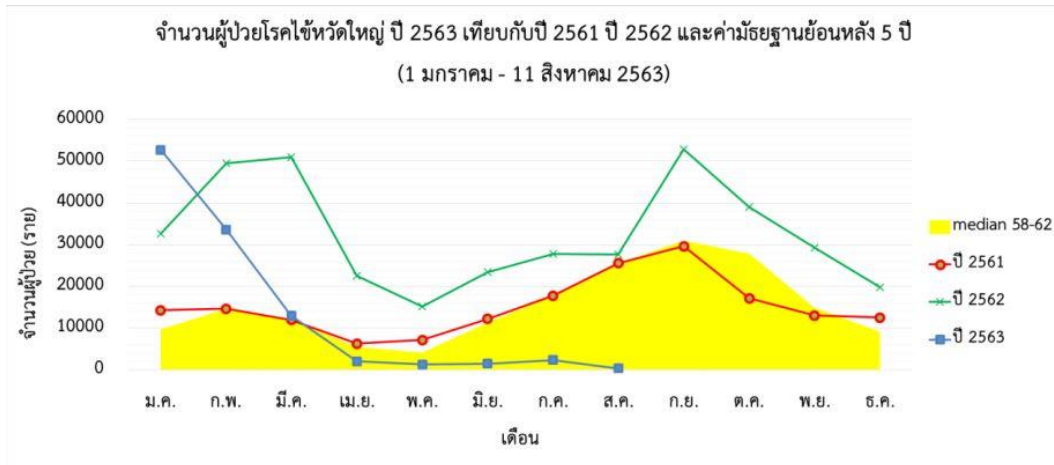
เกิดโรคติดต่อได้ง่ายและแพร่ระบาดอย่างรวดเร็วส่งผลต่อสุขภาพ ทำให้มนุษย์เสียชีวิตได้ง่าย ดังนั้นจำเป็นต้องอาศัยเครื่องมือทางคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์มาประยุกต์ใช้แก้ปัญหาช่วยให้มนุษย์มีคุณภาพชีวิตที่ดีขึ้น (อนุวัตร จิรวัดนาพาณิช และคณะ, 2560)

จากการศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์แสดงให้เห็นถึงบทบาทและประโยชน์ของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่มีส่วนช่วยในการแก้วิกฤตการณ์ที่กำลังเกิดขึ้นจากโรคภัยต่าง ๆ โดยจะจำลองประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ตัวเชื้อโรค ตัวพาหะนำโรค และผู้ติดเชื้อ โดยแปลงข้อมูลให้อยู่ในรูปสมการทางคณิตศาสตร์ เพื่ออธิบายถึงการระบาดและการดำเนินของโรค โดยที่ผู้วิจัยไม่จำเป็นต้องไปศึกษากับมนุษย์โดยตรง ซึ่งอาจเกิดอันตรายต่อชีวิตของผู้วิจัยและผู้ป่วยได้อีกทั้งยังช่วยลดงบประมาณสำหรับมาตรการการป้องกันและการรักษาโรคตามความต้องการที่แท้จริงได้อย่างรวดเร็วและเหมาะสมมากที่สุด (อนุวัตร จิรวัดนาพาณิช และคณะ, 2560)

โรคที่สามารถถ่ายทอดหรือติดต่อโดยการสัมผัสและแพร่ระบาดสู่ผู้อื่นจะเป็นภัยคุกคามที่สำคัญทั่วโลก เนื่องจากลักษณะของการแพร่ระบาดตามธรรมชาติส่งผลให้มีการติดต่อจากคนสู่คน และมีตัวพาหะนำโรค เช่น หมู นก ม้า ซึ่งเป็นโรคที่เกิดจากเชื้อไวรัสไข้หวัดใหญ่ (Influenza virus) ซึ่งเชื่อนี้มีหลายชนิดมาก โดยทั่วไปไวรัสของสัตว์ชนิดใดก็จะก่อให้เกิดโรคเฉพาะสัตว์ชนิดนั้น เช่น ไวรัสไข้หวัดนก (H5N1) จะก่อโรคในสัตว์ปีกเป็นหลัก แต่ในช่วงหลังนี้ไวรัสได้มีการเปลี่ยนแปลงทำให้มีการติดต่อมายังมนุษย์ หรือสัตว์เลี้ยงลูกด้วยนมได้ และมีความรุนแรงสูง ทำให้เสียชีวิตได้ (กรมควบคุมโรค, 2561)

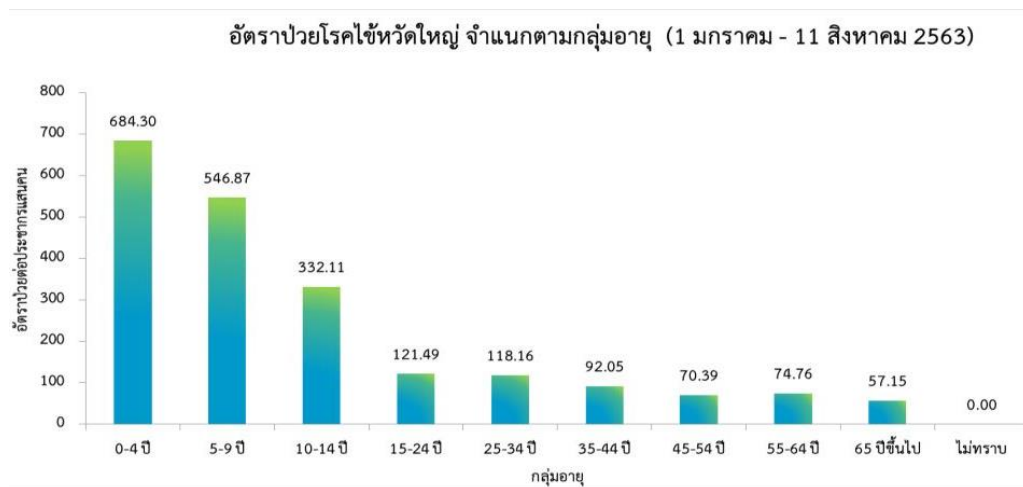
โรคที่เกิดจากเชื้อไวรัสไข้หวัดใหญ่ (Influenza virus) เป็นการติดเชื้อไวรัสที่ระบบทางเดินหายใจแบบเฉียบพลัน เกิดจากเชื้อไวรัสไข้หวัดใหญ่ซึ่งมี 3 ชนิด (type) คือ A, B และ C ไวรัสชนิด A เป็นชนิดที่ทำให้เกิดการระบาดอย่างกว้างขวางทั่วโลก ไวรัสชนิด B ทำให้เกิดการระบาดในพื้นที่ระดับภูมิภาค ส่วนชนิด C มักเป็นการติดเชื้อที่แสดงอาการอย่างอ่อนหรือไม่แสดงอาการ และไม่ทำให้เกิดการระบาด โดยมีลักษณะอาการที่สำคัญคือ มีไข้สูงแบบทันทีทันใด ปวดศีรษะ ปวดเมื่อยกล้ามเนื้อ อ่อนเพลีย ไข้หวัดใหญ่เป็นโรคที่สำคัญที่สุดโรคหนึ่งในกลุ่มโรคติดเชื้ออุบัติใหม่และโรคติดเชื้ออุบัติซ้ำเนื่องจากเกิดการระบาดของไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ H1N1 เริ่มต้นขึ้นในปี 2009 มีการระบาดในทวีปอเมริกาเหนือ อย่างในประเทศเม็กซิโก และประเทศสหรัฐอเมริกา หลังจากนั้นก็มีการระบาดไปทั่วโลก โดยจะระบาดตามฤดูกาลพบในช่วงฤดูฝนและฤดูหนาว ซึ่งมีการระบาดในประเทศไทยหลังจากปี 2009 เป็นต้นมา พบว่ามีผู้ติดเชื้อไข้หวัดใหญ่ในทุก ๆ ปี (จักรพงษ์ บรมมินนรินทร์, มปป)

โรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ H1N1 สามารถพบได้ในทุกเพศทุกวัยโดยติดต่อทางการหายใจ ซึ่งจะได้รับเชื้อที่ออกมาปนเปื้อนอยู่ในอากาศเมื่อผู้ป่วยไอ จาม หรือพูด ในพื้นที่ที่มีคนอยู่รวมกันหนาแน่น เช่น โรงเรียน โรงงาน การแพร่เชื้อจะเกิดได้มาก นอกจากนี้การแพร่เชื้ออาจเกิดโดยการสัมผัสของน้ำมูก น้ำลายของผู้ป่วย จากมือที่สัมผัสกับพื้นผิวที่มีเชื้อไวรัสไข้หวัดใหญ่ แล้วใช้มือสัมผัสที่จมูกและปาก มีระยะฟักตัวประมาณ 1-3 วัน ในผู้ใหญ่ผู้ป่วยสามารถแพร่เชื้อไวรัสไข้หวัดใหญ่ ตั้งแต่ 1 วันก่อนมีอาการและจะแพร่เชื้อต่อไปอีก 3-5 วันหลังมีอาการ ส่วนในเด็กอาจแพร่เชื้อได้นานกว่า 7 วัน ผู้ที่ได้รับเชื้อไวรัสไข้หวัดใหญ่แต่ไม่มีอาการก็สามารถแพร่เชื้อในช่วงเวลานั้นได้เช่นกัน อาการจะเริ่มหลังได้รับเชื้อ 1-4 วัน ผู้ป่วยจะมีไข้แบบทันที พร้อมกับมีอาการปวดศีรษะ หนาวสั่น ปวดเมื่อยกล้ามเนื้อ อ่อนเพลียมาก และอาจพบอาการคัดจมูก เจ็บคอ ถ้าป่วยเป็นระยะเวลาอันยาวจะมีอาการไอจากหลอดลมอักเสบ อาการจะรุนแรงและป่วยนานกว่าไข้หวัดธรรมดา ผู้ป่วยส่วนใหญ่จะหายเป็นปกติภายใน 1-2 สัปดาห์ แต่มีบางรายที่มีอาการรุนแรง เนื่องจากมีภาวะแทรกซ้อนที่สำคัญคือ ปอดบวม ซึ่งอาจทำให้เสียชีวิตได้ ผู้ที่เสี่ยงสูงต่อการเกิดภาวะแทรกซ้อนหรือเสียชีวิต ได้แก่ ผู้ที่อายุ 65 ปีขึ้นไป เด็กที่อายุต่ำกว่า 2 ปี ผู้ป่วยโรคเรื้อรัง เช่น โรคปอด โรคหัวใจ โรคไต เบาหวาน ภูมิคุ้มกันบกพร่อง เด็กที่ได้รับการรักษาด้วยยาแอสไพรินเป็นเวลานาน และหญิงตั้งครรภ์ (จักรพงษ์ บรมมินนรินทร์, มปป)



รูปที่ 1 แสดงจำนวนผู้ป่วยโรคไข้หวัดใหญ่ ปี 2563 เทียบกับปี 2561 ปี 2562 และค่ามัธยฐานย้อนหลัง 5 ปี (1 มกราคม – 11 สิงหาคม 2563) (กองโรคติดต่อทั่วไป, 2563)

สถานการณ์โรคไข้หวัดใหญ่ในปี 2563 ข้อมูลตั้งแต่วันที่ 1 มกราคม – 11 สิงหาคม 2563 มีรายงานผู้ป่วยทั่วประเทศ จำนวน 106,644 ราย คิดเป็นอัตราป่วย 160.85 ต่อประชากรแสนคน เสียชีวิต 3 ราย คิดเป็นอัตราป่วยตาย ร้อยละ 0.00 จำนวนผู้ป่วยสะสมในภาพรวม ลดลง จำนวนผู้ป่วยสะสมมีแนวโน้มลดลงต่ำกว่าค่ามัธยฐาน 5 ปีย้อนหลัง ดังรูปที่ 1 (กองโรคติดต่อทั่วไป, 2563)



รูปที่ 2 แสดงอัตราการป่วยโรคไข้หวัดใหญ่ จำแนกตามกลุ่มอายุ (1 มกราคม – 11 สิงหาคม 2563) (กองโรคติดต่อทั่วไป, 2563)

การเกิดโรคไข้หวัดใหญ่จำแนกตามกลุ่มอายุ พบว่าส่วนใหญ่พบผู้ป่วยอยู่ในกลุ่มอายุ 0 - 4 ปี มีอัตราป่วยสูงสุดคือ 684.30 ต่อประชากรแสนคน รองลงมาคือ กลุ่มอายุ 5 - 9 ปี มีอัตราป่วย 546.87 ต่อประชากรแสนคน และกลุ่มอายุ 10 - 14 ปี มีอัตราป่วย 332.11 ต่อประชากรแสนคน ตามลำดับ จะเห็นได้ว่ากลุ่มผู้ป่วยที่มีอัตราป่วยสูงจะอยู่ในช่วงวัยเด็กจึงต้องมีการให้ความสำคัญต่อการป้องกันควบคุมโรคในกลุ่มวัยเรียนและเด็ก และในสถานที่ที่มีการรวมตัวกันของคนหมู่มาก มากขึ้น ดังรูปที่ 2 (กองโรคติดต่อทั่วไป, 2563)

ในปี 2009 Biophysics Group ได้ศึกษาโรคไขหวัดใหญ่ที่ระบาดเกือบทุกปีด้วยความรุนแรงที่แตกต่างกันออกไป เพื่อที่จะแสดงให้เห็นถึงบทบาทและประโยชน์ของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่จะมีส่วนช่วยสำคัญในการแก้ปัญหาการเกิดโรคระบาดได้ ซึ่งแบบจำลองพลวัตของประชาชน ทั้งของตัวเชื้อโรค ตัวพาหะนำโรค และผู้ติดเชื้อ จะถูกเขียนอยู่ในรูปสมการทางคณิตศาสตร์ ที่จะสามารถสะท้อน หรือบรรยายความเป็นไปของการระบาดหรือดำเนินไปของโรคได้ พลวัตของโรคที่สมจริงนั้นโดยทั่วไปนั้นจะขึ้นอยู่กับตัวแปรของเวลา และตำแหน่ง จากนั้นพิจารณาถึงผลของการควบคุม หรือการกำจัดโรคที่มีต่อการระบาดซึ่งผลการทำนายนี้อาจนำไปสู่การนำเสนอมาตรการต่อสู้กับการระบาดต่อไป (เอกพงษ์ บุญชื่น, 2554)

ในปี 2014 ดร.รุจิรา คงนุ้ย และคณะ ได้ศึกษาและวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของการระบาดระหว่างโรคไขหวัดใหญ่ ไข้หวัดนก ไข้หวัดหมูและอิทธิพลที่ส่งผลให้เกิดการระบาดของโรคในประเทศไทยในจังหวัดตรัง ซึ่งมีข้อมูลการระบาดของโรคสูงสุดในรอบ 17 ปี (พ.ศ 2540 – พ.ศ 2556) ตลอดจนพัฒนาตัวแบบทาง คณิตศาสตร์และวิเคราะห์ปัจจัยที่ส่งผลต่อระบาดวิทยาของโรคในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการระบาดของโรคในจังหวัดตรังโดยพิจารณาฤดูกาลและระยะ พักเชื้อ โดยสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นและแบ่งประชากรคนออกเป็น 4 กลุ่มหลัก คือ ผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ผู้ที่ได้รับเชื้อและอยู่ในช่วงเวลาพักเชื้อ ผู้ที่ติดเชื้อทั้งที่แสดงอาการและไม่แสดงอาการกลุ่มผู้ พึ่งไข้ที่มีภูมิคุ้มกัน โดยกลุ่มผู้ที่ติดเชื้อทั้งที่แสดงอาการและไม่แสดงอาการ แบ่งเป็น 2 กลุ่มย่อยคือ กลุ่ม ในฤดูร้อนและกลุ่มในฤดูฝน จากตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ เราศึกษาพฤติกรรมของผลเฉลยของแบบเชิง คณิตศาสตร์โดยประยุกต์วิธีการของการจำลองเชิงพลวัตมาตรฐาน เงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับตัวแปรที่ทำให้ เกิดความเสถียรภายในของจุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรคและสภาวะระบาดอย่างแท้จริง ความเสถียร ผลเฉลยเชิงตัวเลขแสดงการระบาดของโรคในจังหวัดตรังเพื่อสนับสนุนสมมุติฐานตามหลักวิชาการแนวทาง ใหม่ในการควบคุมการระบาดของโรค (ดร.รุจิรา คงนุ้ย และคณะ, 2557)

ในปี 2015 มนัสนันท์ ลิ้มปวิทยากุล และชมพูนุช โมรา ได้ศึกษาสภาพปัจจุบัน ปัญหาอุปสรรค เงื่อนไขและปัจจัยแห่งความสำเร็จของรูปแบบการเฝ้าระวังโรคไขหวัดใหญ่ของ โรงพยาบาลส่งเสริมสุขภาพตำบลในพื้นที่ชายแดน ไทย-สาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว (สปป.ลาว) จังหวัดอุบลราชธานี โดยใช้กระบวนการวิจัยเชิงสำรวจ เก็บรวบรวมข้อมูลด้วยแบบสอบถามและแบบสัมภาษณ์ที่นักวิจัยพัฒนาขึ้นจากบุคลากรสาธารณสุข กลุ่มผู้นำ ชุมชน องค์การบริหารส่วนตำบล กำหนด ผู้ใหญ่บ้าน อาสาสมัครสาธารณสุข และกลุ่มบุคลากรที่ปฏิบัติงานในหน่วยบริการสุขภาพ ประเทศ สปป.ลาว ผลการวิจัย พบว่า กลุ่มบุคลากรสาธารณสุขที่ปฏิบัติงานในโรงพยาบาลส่งเสริมสุขภาพ ตำบลมีความพร้อมรับการระบาดของโรคไขหวัดใหญ่ในทุกด้าน ทั้งด้านนโยบายและการบริหารจัดการ ด้านเฝ้าระวัง ป้องกันโรค ด้านเวชภัณฑ์ วัสดุ อุปกรณ์ และด้านการควบคุมการระบาดฉุกเฉิน ปัญหาอุปสรรคที่พบ คือคนไข้ไม่มาพบแพทย์ในระยะแรก ไม่เห็นความสำคัญ ควบคุมยากโดยเฉพาะผู้ป่วยจาก สปป. ลาว ส่วนพฤติกรรมเฝ้าระวังและการป้องกันโรคไขหวัดใหญ่ของบุคลากรนั้น โดยภาพรวมมีการปฏิบัติอยู่ในระดับมาก (มนัสนันท์ ลิ้มปวิทยากุล และชมพูนุช โมรา, 2558)

ในปี 2016 ศรีพรหม และคณะ ได้ศึกษาการระบาดของโรคไขหวัดใหญ่ ซึ่งมีผลกระทบมาจากปริมาณน้ำฝน โดยการสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์ในการจำลองสถานการณ์จริง ผู้วิจัยได้ทำการหาจุดสมดุลหาเงื่อนไขที่ทำให้เกิดเสถียรภาพของจุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรคและสภาวะระบาดอย่างแท้จริง มีการวิเคราะห์เชิงตัวเลขเพื่อแสดงผลลัพธ์ของการจำลอง หลังจากการวิเคราะห์พบว่า ปริมาณน้ำฝนมีความสัมพันธ์กับจำนวนผู้ป่วยคือปริมาณน้ำฝนมากผู้ป่วยก็จะมีความถี่ จำนวนมาก ปริมาณน้ำฝนน้อย ผู้ป่วยก็จะมีความถี่จำนวนน้อย (มาลี ศรีพรหม และคณะ, 2559)

จากเหตุข้างต้นผู้วิจัยได้ตระหนักและเห็นประโยชน์ที่รับจึงดำเนินการวิจัย เรื่องตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไขหวัดใหญ่ โดยการฉีดยาวัคซีน ในจังหวัดภูเก็ต เพื่อนำไปใช้เป็นข้อมูลเบื้องต้นในการป้องกันโรค ลดจำนวนผู้ป่วย

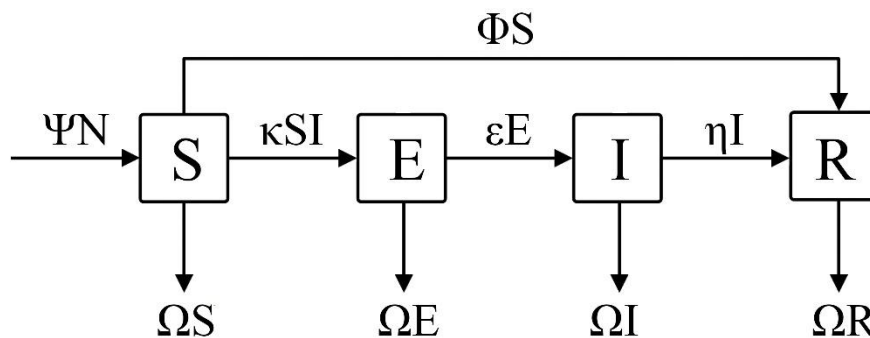
วัตถุประสงค์การวิจัย

1. เพื่อศึกษาและพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไขหวัดใหญ่ โดยการฉีดวัคซีน ในจังหวัดภูเก็ต
2. เพื่อวิเคราะห์เสถียรภาพของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไขหวัดใหญ่ โดยการฉีดวัคซีน ในจังหวัดภูเก็ต

วิธีการวิจัย

การดำเนินการวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับโรคไขหวัดใหญ่ที่สอดคล้องกับกลุ่มประชากร และลักษณะของการเกิดโรค ซึ่งมีวิธีการดำเนินการวิจัย 3 ขั้นตอนดังนี้

1. การพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยได้ศึกษาแผนภาพแสดงความสัมพันธ์ขององค์ประกอบในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ โดยกำหนดให้จำนวนประชากรทั้งหมดมีขนาดคงที่ ซึ่งจะแบ่งประชากรออกเป็น 4 กลุ่ม คือ กลุ่มประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ กลุ่มประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดได้ กลุ่มประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ และกลุ่มประชากรที่พ้นจากการติดเชื้อ ดังนี้



รูปที่ 3 องค์ประกอบของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไขหวัดใหญ่ โดยการฉีดวัคซีน

โดยที่ S เป็นจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ E เป็นจำนวนประชากรที่ติดเชื้อ แต่ไม่แสดงอาการ I เป็นจำนวนประชากรที่ติดเชื้อ R เป็นจำนวนประชากรที่หายจากการติดเชื้อ Ψ เป็นอัตราการเกิดของประชากร Φ เป็นอัตราการฉีดวัคซีนป้องกันการแพร่ระบาดของโรคไขหวัดใหญ่ Ω เป็นอัตราการเสียชีวิตของประชากร κ เป็นอัตราการสัมผัสเชื้อไขหวัดใหญ่ ϵ เป็นอัตราการฟักตัวของเชื้อไขหวัดใหญ่ η เป็นอัตราการหายจากโรคไขหวัดใหญ่ N เป็นจำนวนประชากรทั้งหมด ซึ่งการศึกษาในครั้งนี้ได้กำหนดให้จำนวนประชากรมนุษย์คงที่

2. การตรวจสอบตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ การตรวจสอบตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไขหวัดใหญ่ โดยการฉีดวัคซีน ในจังหวัดภูเก็ต เป็นการตรวจสอบความถูกต้องของตัวแบบโดยผู้เชี่ยวชาญที่เกี่ยวข้องกับศาสตร์นี้โดยตรง ได้แก่ นักระบาดวิทยาและนักคณิตศาสตร์

3. การวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ การวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เป็นการวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐาน (Standard Method) โดยการศึกษาจุดสมดุลและศึกษาเสถียรภาพของจุดสมดุลเพื่อเงื่อนไขของพารามิเตอร์ที่เหมาะสมของจุดสมดุล หาค่าระดับการติดเชื้อโดยใช้วิธี Next Generation Method หาค่าตอบเชิงวิเคราะห์และคำตอบเชิงตัวเลข โดยวิธี Numerical Analysis ดังวิธีการต่อไปนี้

3.1 การวิเคราะห์ตามวิธีการมาตรฐาน (Standard Method) การวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐานเป็นการศึกษาหาจุดสมดุล ค่าระดับการติดเชื้อ และเสถียรภาพของระบบ ได้ดังนี้

3.1.1 การหาจุดสมดุล (Equilibrium Point)

การหาจุดสมดุลดำเนินการโดยจัดสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ให้เท่ากับศูนย์ คือ $\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dE}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0$ และ $\frac{dR}{dt} = 0$ จากสมการข้างต้นจะได้ค่า ณ จุดสมดุลไม่มีโรค (Disease Free Equilibrium Point: E_0) โดยกำหนดให้ $E = 0$ จะได้ $I = 0$ และ $R = 0$ และแทนในสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นจะได้ $S = 1$ ดังนั้น $E_0 = (S, E, I, R) = E_0 = (1, 0, 0, 0)$ และ ณ จุดสมดุลที่มีโรค (Endemic Equilibrium Point: E_1) โดยกำหนดให้ $E^* \neq 0$ และ $E^* > 0$ จะได้ $E_1 = (S^*, E^*, I^*, R^*)$

3.1.2 การหาค่าระดับการติดเชื้อ (Basic Reproductive Number: R_0)

ค่าระดับการติดเชื้อเป็นค่าเฉลี่ยที่ผู้ป่วยหนึ่งคนสามารถทำให้คนกลุ่มเสี่ยงป่วยเป็นจำนวนกี่คนในช่วงของเวลาที่เขายังป่วยอยู่ โดยใช้วิธีการ Next Generation Method โดยจัดสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นในรูป $\frac{dX}{dt} = F(X) - V(X)$ เพื่อหาค่า R_0 จากเมตริกซ์ $P(FV^{-1})$ ซึ่ง $F(X)$ คือเมตริกซ์ของผู้ป่วยที่เพิ่มขึ้น $V(X)$ คือเมตริกซ์ของผู้ป่วยที่เปลี่ยนสถานะจากกลุ่มหนึ่งไปอีกกลุ่มหนึ่งได้จากอนุพันธ์ย่อย (Partial Derivative) ดังนี้

$$X = \begin{bmatrix} S \\ E \\ I \\ R \end{bmatrix}, F = \left[\frac{d(F(X_i))}{dX_i} \right] \text{ และ } V = \left[\frac{d(V(X_i))}{dX_i} \right]$$

โดยพิจารณาค่า spectral radius (R_0) ดังนี้

1. $R_0 > 1$ แสดงว่า โรคมีการระบาดเพิ่มขึ้น (Epidemic)
2. $R_0 = 1$ แสดงว่า โรคเริ่มเสถียร (Endemic)
3. $R_0 < 1$ แสดงว่า โรคไม่มีการระบาด

3.1.3 การวิเคราะห์เสถียรภาพ (Stability Analysis) เป็นการหาค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen Value)

เพื่ออธิบายคำตอบของสมการเกี่ยวกับค่าความสมดุลสำหรับการตรวจสอบว่าเป็น Local Asymptotically Stable มี 2 กรณี ดังนี้

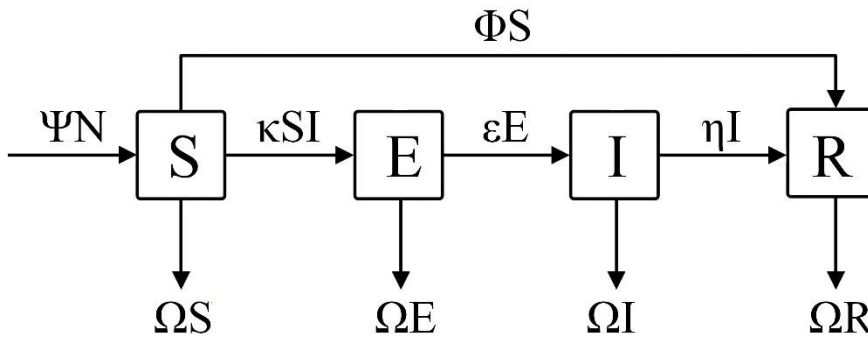
1) Local Asymptotically Stable ณ จุด E_0 ของจุดสมดุลที่ไม่มีโรคโดยการตรวจสอบค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมตริกซ์ ณ สภาวะที่ไม่มีโรค E_0 ซึ่งจะได้สมการลักษณะเฉพาะจาก $\det(J_0 - \lambda I) = 0, J_0$ คือจาโคเบียนเมตริกซ์ ณ จุด E_0 โดยมีข้อกำหนดว่า λ ทุกค่าส่วนจริงจะเป็นลบซึ่งจะสอดคล้องตามเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz ซึ่งจะส่งผลให้ค่า $R_0 < 1$

2) Local Asymptotically Stable ณ จุด E_1 ของจุดสมดุลที่มีโรคโดยการตรวจสอบค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมตริกซ์ ณ สภาวะที่มีการแพร่ระบาดของโรค E_1 ซึ่งจะได้สมการลักษณะเฉพาะจาก $\det(J_1 - \lambda I) = 0, J_1$ คือจาโคเบียนเมตริกซ์ ณ จุด E_1 โดยมีข้อกำหนดว่า λ ทุกค่าส่วนจริงจะเป็นลบซึ่งจะสอดคล้องตามเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz ซึ่งจะส่งผลให้ค่า $R_0 > 1$

3.2 การวิเคราะห์การวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Numerical Analysis) การวิเคราะห์เชิงตัวเลขเป็นการพิจารณาหาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมที่ทำให้จุดสมดุลที่ไม่มีโรค (Disease Free Equilibrium Point: E_0) และจุดสมดุลที่เกิดการแพร่ระบาดของโรค (Endemic Equilibrium Point: E_1) ที่ทำให้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นเป็น Local Asymptotically Stable เพื่อนำค่าพารามิเตอร์ไปคำนวณหาคำตอบเชิงตัวเลขโดยจำลอง แบบด้วยโปรแกรม Matlab (สุกัลยา ศรีสุริฉันทน์, 2559)

4. การสร้างตัวแบบและวิเคราะห์ตัวแบบ

การสร้างและวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐานจากการวิจัยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไขหวัดใหญ่ โดยการฉีดวัคซีน ในจังหวัดภูเก็ต สามารถสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์โดยผู้วิจัยสนใจศึกษาอัตราการฉีดวัคซีนป้องกันการแพร่ระบาดของโรคไขหวัดใหญ่ (Φ) ดังรูปที่ 4 ดังนี้



รูปที่ 4 แผนภาพตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไขหวัดใหญ่ โดยการฉีดวัคซีน

- เมื่อ S เป็นจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ณ เวลา t ใด ๆ
 - E เป็นจำนวนประชากรที่ติดเชื้อ แต่ไม่แสดงอาการ ณ เวลา t ใด ๆ
 - I เป็นจำนวนประชากรที่ติดเชื้อ ณ เวลา t ใด ๆ
 - R เป็นจำนวนประชากรที่หายจากการติดเชื้อ ณ เวลา t ใด ๆ
 - Ψ เป็นอัตราการเกิดของประชากร
 - Φ เป็นอัตราการฉีดวัคซีนป้องกันการแพร่ระบาดของโรคไขหวัดใหญ่
 - Ω เป็นอัตราการเสียชีวิตของประชากร
 - κ เป็นอัตราการสัมผัสเชื้อไขหวัดใหญ่
 - ϵ เป็นอัตราการฟักตัวของเชื้อไขหวัดใหญ่
 - η เป็นอัตราการหายจากโรคไขหวัดใหญ่
 - N เป็นจำนวนประชากรทั้งหมด ซึ่งการศึกษาในครั้งนี้ได้กำหนดให้จำนวนประชากรมนุษย์คงที่
- จากรูปที่ 4 ผู้วิจัยได้ดำเนินการส่งให้ผู้เชี่ยวชาญที่เกี่ยวข้อง ได้แก่ ผู้ทรงคุณวุฒิทางคณิตศาสตร์ และบุคลากรทางการแพทย์ ช่วยตรวจสอบแผนภาพและสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น เมื่อผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบและให้ข้อเสนอแนะ ผู้วิจัยได้ทำการแก้ไข ปรับปรุงตามคำแนะนำแล้วนำตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ได้มาวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐาน ซึ่งจากรูปที่ 4 ได้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น (Kermack and McKendrick, 1927) ดังนี้

$$\frac{dS}{dt} = \Psi N - \Phi S - \kappa SI - \Omega S \tag{1}$$

$$\frac{dE}{dt} = \kappa SI - \epsilon E - \Omega E \tag{2}$$

$$\frac{dI}{dt} = \epsilon E - \eta I - \Omega I \tag{3}$$

$$\frac{dR}{dt} = \Phi S + \eta I - \Omega R \tag{4}$$

$$N = S + E + I + R \tag{5}$$

4.1 การหาจุดสมดุล (Equilibrium Point)

เนื่องจาก $\frac{dX}{dt} = F(X)$ โดยที่ $F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$ และ $X = (S, E, I, R)^t$ กำหนดให้จำนวนประชากรทั้งหมดเป็น

$$\text{ค่าคงที่ นั่นคือ } \frac{dN}{dt} = 0 \text{ และ } \frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dE}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt}$$

$$\text{ดังนั้น } 0 = \Psi N - \Omega N \text{ จะได้ } \Psi = \Omega$$

เมื่อกำหนดให้ $\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dE}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0, \frac{dR}{dt} = 0$, จากสมการ (1), (2), (3) และ (4) จะได้

$$S^* = \frac{\Psi N}{\Phi + \kappa I^* + \Omega}, E^* = \frac{\kappa \Psi N I^* (\varepsilon + \Omega)}{\Phi + \kappa I^* + \Omega}, I^* = \frac{\varepsilon \kappa \Psi N (\varepsilon + \Omega) (\eta + \Omega)}{\kappa (\Phi + \Omega)}, R^* = \frac{\Phi \Psi N \Omega}{\Phi + \kappa I^* + \Omega} + \eta I^* \quad (6)$$

เสถียรภาพของจุดสมดุลสามารถพิจารณาค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมตริกซ์ จากสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น (1)-(4) สามารถแปลงเป็นจาโคเบียนเมตริกซ์ ได้ดังนี้

$$J = \begin{bmatrix} -\Phi - \kappa I - \Omega & 0 & -\kappa S & 0 \\ \kappa I & -\varepsilon - \Omega & \kappa S & 0 \\ 0 & \varepsilon & -\eta - \Omega & 0 \\ \Phi & 0 & \eta & -\Omega \end{bmatrix}$$

และพิจารณาค่าลักษณะเฉพาะได้จาก $\det(J - \lambda I_4) = 0$ เมื่อ I_4 คือเมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 4×4

4.1.1 การหาจุดสมดุลไม่มีโรค (Disease Free Equilibrium Point)

กำหนดให้ $E=0$ จะได้ $I=0$ และ $R=0$ จะได้ $S=1$ ดังนั้น $E_0(S, E, I, R) = E_0(1, 0, 0, 0)$ เสถียรภาพของระบบ (Stability of Systems) ที่จุด E_0 โดยดำเนินการหาลักษณะเฉพาะ $\det(J_0 - \lambda I_4) = 0$ เพื่อหาค่า λ เมื่อ λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen Values) และ I_4 คือเมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 4×4 ดังนี้

$$J_0 = \begin{bmatrix} -\Phi - \Omega & 0 & -\kappa S & 0 \\ 0 & -\varepsilon - \Omega & \kappa S & 0 \\ 0 & \varepsilon & -\eta - \Omega & 0 \\ \Phi & 0 & \eta & -\Omega \end{bmatrix}$$

$$\det(J_0 - \lambda I_4) = \begin{bmatrix} -\Phi - \Omega - \lambda & 0 & -\kappa S & 0 \\ 0 & -\varepsilon - \Omega - \lambda & \kappa S & 0 \\ 0 & \varepsilon & -\eta - \Omega - \lambda & 0 \\ \Phi & 0 & \eta & -\Omega - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\text{จะได้ } \lambda_1 = -\Omega, \lambda_2 = -\Phi - \Omega, \lambda_3 = \frac{-2\Omega - \eta - \varepsilon + \sqrt{4\Omega^2 + \eta^2 + \varepsilon^2 - 2\eta\varepsilon + 4S\varepsilon\kappa}}{2}$$

$$\text{และ } \lambda_4 = \frac{-2\Omega - \eta - \varepsilon - \sqrt{4\Omega^2 + \eta^2 + \varepsilon^2 - 2\eta\varepsilon + 4S\varepsilon\kappa}}{2}$$

4.1.2 การหาจุดสมดุลที่มีโรค (Disease Equilibrium Point)

กำหนดให้ $E^* \neq 0$ และ $E^* > 0$ จะได้ $E_0 = (S^*, E^*, I^*, R^*)$ เสถียรภาพของระบบ (Stability of Systems) ที่จุด E_1 โดยดำเนินการหาลักษณะเฉพาะ $\det(J_1 - \lambda I_4) = 0$ เพื่อหาค่า λ เมื่อ λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen Values) และ I_4 คือเมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 4×4 ดังนี้

$$J_1 = \begin{bmatrix} -\Phi - \kappa I - \Omega & 0 & -\kappa S & 0 \\ \kappa I & -\varepsilon - \Omega & \kappa S & 0 \\ 0 & \varepsilon & -\eta - \Omega & 0 \\ \Phi & 0 & \eta & -\Omega \end{bmatrix}$$

$$\det(J_1 - \lambda I_4) = \begin{bmatrix} -\Phi - \kappa I - \Omega - \lambda & 0 & -\kappa S & 0 \\ \kappa I & -\varepsilon - \Omega - \lambda & \kappa S & 0 \\ 0 & \varepsilon & -\eta - \Omega - \lambda & 0 \\ \Phi & 0 & \eta & -\Omega - \lambda \end{bmatrix}$$

จะได้

$$\lambda_1 = \left(2^{1/3} \left(-\varepsilon^2 + \varepsilon\eta - \eta^2 + i\varepsilon\kappa - 3S\varepsilon\kappa + i\eta\kappa + \kappa^2 + \varepsilon\Phi + \eta\Phi - 2i\kappa\Phi - \Phi^2 \right) / (3(2\varepsilon^3 - 3\varepsilon^2\eta - 3\varepsilon\eta^2 + 2\eta^3 - 3i\varepsilon^2\kappa + 9S\varepsilon^2\kappa + 12i\varepsilon\eta\kappa + 9S\varepsilon\eta\kappa - 3i\eta^2\kappa + 3\varepsilon\kappa^2 + 9iS\varepsilon\kappa^2 + 3\eta\kappa^2 - 2i\kappa^3 - 3\varepsilon^2\Phi + 12\varepsilon\eta\Phi - 3\eta^2\Phi - 6i\varepsilon\kappa\Phi - 18S\varepsilon\kappa\Phi - 6i\eta\kappa\Phi - 6\kappa^2\Phi - 3\varepsilon\Phi^2 - 3\eta\Phi^2 + 6i\kappa\Phi^2 + 2\Phi^3 + \sqrt{(4(-\varepsilon^2 + \varepsilon\eta - \eta^2 + i\varepsilon\kappa - 3S\varepsilon\kappa + i\eta\kappa + \kappa^2 + \varepsilon\Phi + \eta\Phi - 2i\kappa\Phi - \Phi^2)^3 + (2\varepsilon^3 - 3\varepsilon^2\eta - 3\varepsilon\eta^2 + 2\eta^3 - 3i\varepsilon^2\kappa + 9S\varepsilon^2\kappa + 12i\varepsilon\eta\kappa + 9S\varepsilon\eta\kappa - 3i\eta^2\kappa + 3\varepsilon\kappa^2 + 9iS\varepsilon\kappa^2 + 3\eta\kappa^2 - 2i\kappa^3 - 3\varepsilon^2\Phi + 12\varepsilon\eta\Phi - 3\eta^2\Phi - 6i\varepsilon\kappa\Phi - 18S\varepsilon\kappa\Phi - 6i\eta\kappa\Phi - 6\kappa^2\Phi - 3\varepsilon\Phi^2 - 3\eta\Phi^2 + 6i\kappa\Phi^2 + 2\Phi^3)^2})^{1/3} \right) - \frac{1}{3 \times 2^{1/3}} (2\varepsilon^3 - 3\varepsilon^2\eta - 3\varepsilon\eta^2 + 2\eta^3 - 3i\varepsilon^2\kappa + 9S\varepsilon^2\kappa + 12i\varepsilon\eta\kappa + 9S\varepsilon\eta\kappa - 3i\eta^2\kappa + 3\varepsilon\kappa^2 + 9iS\varepsilon\kappa^2 + 3\eta\kappa^2 - 2i\kappa^3 - 3\varepsilon^2\Phi + 12\varepsilon\eta\Phi - 3\eta^2\Phi - 6i\varepsilon\kappa\Phi - 18S\varepsilon\kappa\Phi - 6i\eta\kappa\Phi - 6\kappa^2\Phi - 3\varepsilon\Phi^2 - 3\eta\Phi^2 + 6i\kappa\Phi^2 + 2\Phi^3 + \sqrt{(4(-\varepsilon^2 + \varepsilon\eta - \eta^2 + i\varepsilon\kappa - 3S\varepsilon\kappa + i\eta\kappa + \kappa^2 + \varepsilon\Phi + \eta\Phi - 2i\kappa\Phi - \Phi^2)^3 + 6i\kappa\Phi^2 + 2\Phi^3 + \sqrt{(4(-\varepsilon^2 + \varepsilon\eta - \eta^2 + i\varepsilon\kappa - 3S\varepsilon\kappa + i\eta\kappa + \kappa^2 + \varepsilon\Phi + \eta\Phi - 2i\kappa\Phi - \Phi^2)^3 + (2\varepsilon^3 - 3\varepsilon^2\eta - 3\varepsilon\eta^2 + 2\eta^3 - 3i\varepsilon^2\kappa + 9S\varepsilon^2\kappa + 12i\varepsilon\eta\kappa + 9S\varepsilon\eta\kappa - 3i\eta^2\kappa + 3\varepsilon\kappa^2 + 9iS\varepsilon\kappa^2 + 3\eta\kappa^2 - 2i\kappa^3 - 3\varepsilon^2\Phi + 12\varepsilon\eta\Phi - 3\eta^2\Phi - 6i\varepsilon\kappa\Phi - 18S\varepsilon\kappa\Phi - 6i\eta\kappa\Phi - 6\kappa^2\Phi - 3\varepsilon\Phi^2 - 3\eta\Phi^2 + 6i\kappa\Phi^2 + 2\Phi^3)^2})^{1/3} \right) + \frac{1}{3} (-\varepsilon - \eta - i\kappa - \Phi - 3\Omega) \right)$$

$$\lambda_2 = -\left(\left(\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(-\varepsilon^2 + \varepsilon\eta - \eta^2 + i\varepsilon\kappa - 3S\varepsilon\kappa + i\eta\kappa + \kappa^2 + \varepsilon\Phi + \eta\Phi - 2i\kappa\Phi - \Phi^2\right)\right)\right) / (32^{2/3})$$

$$(2\varepsilon^3 - 3\varepsilon^2\eta - 3\varepsilon\eta^2 + 2\eta^3 - 3i\varepsilon^2\kappa + 9S\varepsilon^2\kappa + 12i\varepsilon\eta\kappa + 9S\varepsilon\eta\kappa - 3i\eta^2\kappa + 3\varepsilon\kappa^2 + 9iS\varepsilon\kappa^2$$

$$+ 3\eta\kappa^2 - 2i\kappa^3 - 3\varepsilon^2\Phi + 12\varepsilon\eta\Phi - 3\eta^2\Phi - 6i\varepsilon\kappa\Phi - 18S\varepsilon\kappa\Phi - 6i\eta\kappa\Phi - 6\kappa^2\Phi - 3\varepsilon\Phi^2$$

$$- 3\eta\Phi^2 + 6i\kappa\Phi^2 + 2\Phi^3 + \sqrt{(4(-\varepsilon^2 + \varepsilon\eta - \eta^2 + i\varepsilon\kappa - 3S\varepsilon\kappa + i\eta\kappa + \kappa^2 + \varepsilon\Phi + \eta\Phi - 2i\kappa\Phi$$

$$- \Phi^2)^3 + (2\varepsilon^3 - 3\varepsilon^2\eta - 3\varepsilon\eta^2 + 2\eta^3 - 3i\varepsilon^2\kappa + 9S\varepsilon^2\kappa + 12i\varepsilon\eta\kappa + 9S\varepsilon\eta\kappa - 3i\eta^2\kappa + 3\varepsilon\kappa^2$$

$$+ 9iS\varepsilon\kappa^2 + 3\eta\kappa^2 - 2i\kappa^3 - 3\varepsilon^2\Phi + 12\varepsilon\eta\Phi - 3\eta^2\Phi - 6i\varepsilon\kappa\Phi - 18S\varepsilon\kappa\Phi - 6i\eta\kappa\Phi - 6\kappa^2\Phi$$

$$- 3\varepsilon\Phi^2 - 3\eta\Phi^2 + 6i\kappa\Phi^2 + 2\Phi^3)^2)^{1/3}) + \frac{1}{62^{1/3}}(1-i\sqrt{3})(2\varepsilon^3 - 3\varepsilon^2\eta - 3\varepsilon\eta^2 + 2\eta^3$$

$$- 3i\varepsilon^2\kappa + 9S\varepsilon^2\kappa + 12i\varepsilon\eta\kappa + 9S\varepsilon\eta\kappa - 3i\eta^2\kappa + 3\varepsilon\kappa^2 + 9iS\varepsilon\kappa^2 + 3\eta\kappa^2 - 2i\kappa^3 - 3\varepsilon^2\Phi$$

$$+ 12\varepsilon\eta\Phi - 3\eta^2\Phi - 6i\varepsilon\kappa\Phi - 18S\varepsilon\kappa\Phi - 6i\eta\kappa\Phi - 6\kappa^2\Phi - 3\varepsilon\Phi^2 - 3\eta\Phi^2 + 6i\kappa\Phi^2 + 2\Phi^3$$

$$+ \sqrt{(4(-\varepsilon^2 + \varepsilon\eta - \eta^2 + i\varepsilon\kappa - 3S\varepsilon\kappa + i\eta\kappa + \kappa^2 + \varepsilon\Phi + \eta\Phi - 2i\kappa\Phi - \Phi^2)^3 + (2\varepsilon^3 - 3\varepsilon^2\eta$$

$$- 3\varepsilon\eta^2 + 2\eta^3 - 3i\varepsilon^2\kappa + 9S\varepsilon^2\kappa + 12i\varepsilon\eta\kappa + 9S\varepsilon\eta\kappa - 3i\eta^2\kappa + 3\varepsilon\kappa^2 + 9iS\varepsilon\kappa^2 + 3\eta\kappa^2 - 2i\kappa^3$$

$$- 3\varepsilon^2\Phi + 12\varepsilon\eta\Phi - 3\eta^2\Phi - 6i\varepsilon\kappa\Phi - 18S\varepsilon\kappa\Phi - 6i\eta\kappa\Phi - 6\kappa^2\Phi - 3\varepsilon\Phi^2 - 3\eta\Phi^2 + 6i\kappa\Phi^2$$

$$+ 2\Phi^3)^2)^{1/3} + \frac{1}{3}(-\varepsilon - \eta - i\kappa - \Phi - 3\Omega)$$

$$\lambda_3 = -\left(\left(\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(-\varepsilon^2 + \varepsilon\eta - \eta^2 + i\varepsilon\kappa - 3S\varepsilon\kappa + i\eta\kappa + \kappa^2 + \varepsilon\Phi + \eta\Phi - 2i\kappa\Phi - \Phi^2\right)\right)\right) / (32^{2/3})$$

$$(2\varepsilon^3 - 3\varepsilon^2\eta - 3\varepsilon\eta^2 + 2\eta^3 - 3i\varepsilon^2\kappa + 9S\varepsilon^2\kappa + 12i\varepsilon\eta\kappa + 9S\varepsilon\eta\kappa - 3i\eta^2\kappa + 3\varepsilon\kappa^2 + 9iS\varepsilon\kappa^2$$

$$+ 3\eta\kappa^2 - 2i\kappa^3 - 3\varepsilon^2\Phi + 12\varepsilon\eta\Phi - 3\eta^2\Phi - 6i\varepsilon\kappa\Phi - 18S\varepsilon\kappa\Phi - 6i\eta\kappa\Phi - 6\kappa^2\Phi - 3\varepsilon\Phi^2$$

$$- 3\eta\Phi^2 + 6i\kappa\Phi^2 + 2\Phi^3 + \sqrt{(4(-\varepsilon^2 + \varepsilon\eta - \eta^2 + i\varepsilon\kappa - 3S\varepsilon\kappa + i\eta\kappa + \kappa^2 + \varepsilon\Phi + \eta\Phi$$

$$- 2i\kappa\Phi - \Phi^2)^3 + (2\varepsilon^3 - 3\varepsilon^2\eta - 3\varepsilon\eta^2 + 2\eta^3 - 3i\varepsilon^2\kappa + 9S\varepsilon^2\kappa + 12i\varepsilon\eta\kappa + 9S\varepsilon\eta\kappa - 3i\eta^2\kappa$$

$$+ 3\varepsilon\kappa^2 + 9iS\varepsilon\kappa^2 + 3\eta\kappa^2 - 2i\kappa^3 - 3\varepsilon^2\Phi + 12\varepsilon\eta\Phi - 3\eta^2\Phi - 6i\varepsilon\kappa\Phi - 18S\varepsilon\kappa\Phi - 6i\eta\kappa\Phi$$

$$- 6\kappa^2\Phi - 3\varepsilon\Phi^2 - 3\eta\Phi^2 + 6i\kappa\Phi^2 + 2\Phi^3)^2)^{1/3}) + \frac{1}{62^{1/3}}(1+i\sqrt{3})(2\varepsilon^3 - 3\varepsilon^2\eta - 3\varepsilon\eta^2 + 2\eta^3$$

$$- 3i\varepsilon^2\kappa + 9S\varepsilon^2\kappa + 12i\varepsilon\eta\kappa + 9S\varepsilon\eta\kappa - 3i\eta^2\kappa + 3\varepsilon\kappa^2 + 9iS\varepsilon\kappa^2 + 3\eta\kappa^2 - 2i\kappa^3 - 3\varepsilon^2\Phi$$

$$+ 12\varepsilon\eta\Phi - 3\eta^2\Phi - 6i\varepsilon\kappa\Phi - 18S\varepsilon\kappa\Phi - 6i\eta\kappa\Phi - 6\kappa^2\Phi - 3\varepsilon\Phi^2 - 3\eta\Phi^2 + 6i\kappa\Phi^2 + 2\Phi^3$$

$$+ \sqrt{(4(-\varepsilon^2 + \varepsilon\eta - \eta^2 + i\varepsilon\kappa - 3S\varepsilon\kappa + i\eta\kappa + \kappa^2 + \varepsilon\Phi + \eta\Phi - 2i\kappa\Phi - \Phi^2)^3 + (2\varepsilon^3 - 3\varepsilon^2\eta$$

$$- 3\varepsilon\eta^2 + 2\eta^3 - 3i\varepsilon^2\kappa + 9S\varepsilon^2\kappa + 12i\varepsilon\eta\kappa + 9S\varepsilon\eta\kappa - 3i\eta^2\kappa + 3\varepsilon\kappa^2 + 9iS\varepsilon\kappa^2 + 3\eta\kappa^2 - 2i\kappa^3$$

$$- 3\varepsilon^2\Phi + 12\varepsilon\eta\Phi - 3\eta^2\Phi - 6i\varepsilon\kappa\Phi - 18S\varepsilon\kappa\Phi - 6i\eta\kappa\Phi - 6\kappa^2\Phi - 3\varepsilon\Phi^2 - 3\eta\Phi^2 + 6i\kappa\Phi^2$$

$$+ 2\Phi^3)^2)^{1/3} + \frac{1}{3}(-\varepsilon - \eta - i\kappa - \Phi - 3\Omega)$$

$$\lambda_4 = -\Omega$$

4.2 การหาค่าระดับการติดเชื้อ (Basic Reproductive Number : R_0)

จากสมการ (1)-(4) จะได้เมตริกซ์ในรูป $\frac{dX}{dt} = F(X) - V(X)$ เพื่อหาค่า spectral radius (R_0) จากเมตริกซ์ $P(FV^{-1})$ ซึ่ง $F(X)$ และ $V(X)$ ได้จากอนุพันธ์ย่อย (Partial derivative) ดังนี้

$$X = \begin{bmatrix} S \\ E \\ I \\ R \end{bmatrix}, F = \left[\frac{d(F(X_i))}{dX_i} \right] \text{ และ } V = \left[\frac{d(V(X_i))}{dX_i} \right]$$

เมื่อ $F(X)$ คือเมตริกซ์ของผู้ป่วยเพิ่มขึ้น และ $V(X)$ คือเมตริกซ์ของผู้ป่วยที่เปลี่ยนสถานะ จากกลุ่มหนึ่งไปเป็นอีกกลุ่มหนึ่งโดยพิจารณาค่าระดับการติดเชื้อ R_0 ดังนี้

$$F(X) = \begin{bmatrix} 0 \\ \kappa SI \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ และ } V(X) = \begin{bmatrix} -\Psi N + \Phi S + \kappa SI + \Omega S \\ \varepsilon E + \Omega E \\ -\varepsilon E + \eta I + \Omega I \\ -\Phi S - \eta I + \Omega R \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $FV^{-1}(E_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\kappa S \varepsilon}{(\varepsilon + \Omega)(\eta + \Omega)} & \frac{\kappa S}{(\eta + \Omega)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

คำนวณหาค่า spectral radius ของ $FV^{-1}(E_0)$ เขียนแทนด้วย $\rho(FV^{-1}(E_0)) = \frac{\kappa S \varepsilon}{(\varepsilon + \Omega)(\eta + \Omega)}$

$$\text{จะได้ } R_0 = \frac{\kappa \Psi N \varepsilon}{(\Phi + \Omega)(\varepsilon + \Omega)(\eta + \Omega)}$$

โดยพิจารณาค่า spectral radius (R_0) ดังนี้

1. $R_0 > 1$ แสดงว่า โรครมีการระบาดเพิ่มขึ้น (Epidemic)
2. $R_0 = 1$ แสดงว่า โรคเริ่มเสถียร (Endemic)
3. $R_0 < 1$ แสดงว่า โรคไม่มีการระบาด

4.3 การวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Numerical Analysis)

การวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ทำการวิเคราะห์เชิงตัวเลขโดยการนำค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการสำรวจข้อมูลเกี่ยวกับการแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่ ซึ่งมีค่าตามตารางดังนี้

ตารางที่ 1 ค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการสำรวจข้อมูลเกี่ยวกับการแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่

ข้อความ	สัญลักษณ์	ค่าพารามิเตอร์	หน่วย
อัตราการเกิดของประชากร	Ψ	4.81480×10^{-5}	คนต่อวัน
อัตราการฉีดวัคซีน	Φ	0-1	คนต่อวัน
อัตราการเสียชีวิตของประชากร	Ω	1.77045×10^{-5}	คนต่อวัน
อัตราการสัมผัสเชื้อ	κ	2.02365×10^{-5}	คนต่อวัน
อัตราการฟักตัวของเชื้อ	ε	6.7455×10^{-6}	คนต่อวัน
อัตราการหายจากโรค	η	2.8909×10^{-6}	คนต่อวัน
จำนวนประชากรทั้งหมด	N	416581	คน

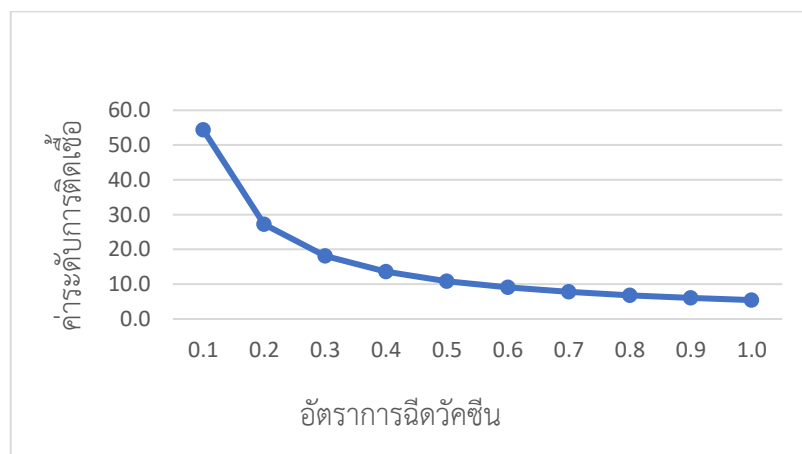
*สาธารณสุขจังหวัดภูเก็ต

จากสมการลักษณะเฉพาะ (Eigen Value: λ) สมการการหาค่าระดับการติดเชื้อ (Basic Reproductive Number: R_0) และค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมจากตารางข้างต้นจะได้รับคำตอบเป็นค่าลักษณะเฉพาะซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz Criteria และได้ค่าระดับการติดเชื้อได้ดังตารางที่ 2 ดังนี้

ตารางที่ 2 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าพารามิเตอร์ของอัตราการฉีดวัคซีนป้องกันโรคไขหวัดใหญ่ (Φ) กับค่าระดับการติดเชื้อ (R_0)

อัตราการฉีดวัคซีน (Φ)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
ค่าระดับการติดเชื้อ (R_0)	54.4	27.2	18.1	13.6	10.9	9.1	7.8	6.8	6.0	5.4

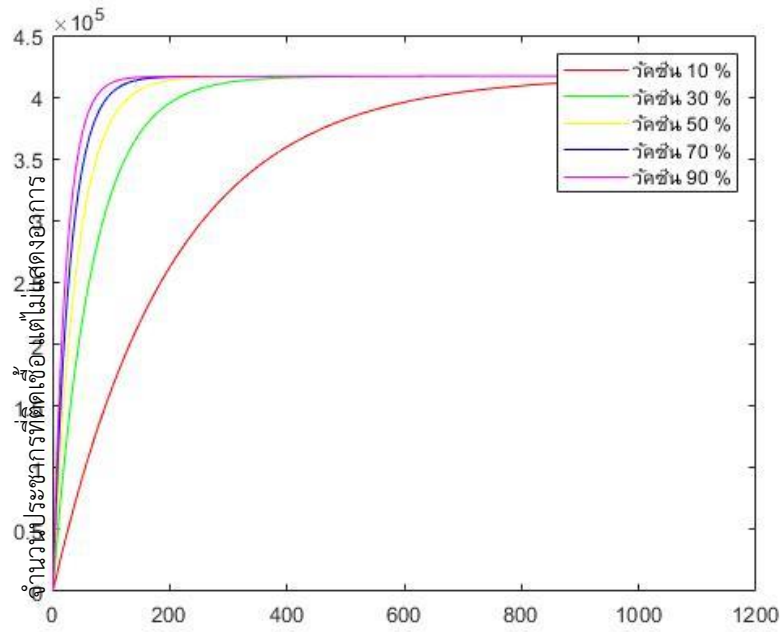
จากตารางที่ 2 พบว่าค่าอัตราการฉีดวัคซีนป้องกันโรคไขหวัดใหญ่ (Φ) เป็นปัจจัยหนึ่งที่ส่งผลต่อการเปลี่ยนแปลงของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไขหวัดใหญ่ โดยการฉีดวัคซีนในจังหวัดภูเก็ต ซึ่งอัตราการฉีดวัคซีนป้องกันโรคไขหวัดใหญ่ (Φ) มีค่ามากขึ้นส่งผลให้ค่าระดับการติดเชื้อ (R_0) ลดลง และแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราการฉีดวัคซีนป้องกันโรคไขหวัดใหญ่ (Φ) กับ ค่าระดับการติดเชื้อ (R_0) ดังนี้



รูปที่ 5 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าพารามิเตอร์ของอัตราการฉีดวัคซีนป้องกันโรคไขหวัดใหญ่ กับค่าระดับการติดเชื้อ

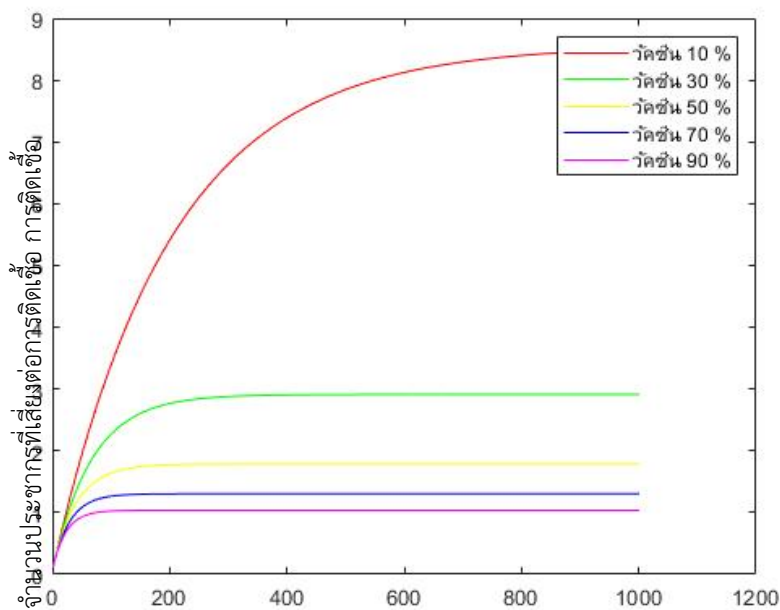
เมื่อพิจารณาเสถียรภาพของระบบ ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรค จะพบว่าค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda_1 = -0.100018$, $\lambda_2 = -0.0000177045$, $\lambda_3 = -0.00002445$, $\lambda_4 = -0.0000205954$ ซึ่งทุกส่วนจริงมีค่าเป็นลบส่งผลให้คำตอบจะลู่เข้าสู่ $E_0 = (416581, 0, 0, 0)$ ดังนั้นจุดสมดุลที่ไม่มีโรค E_0 จะเป็น Local Asymptotically (Fred Brauer, Pauline den Driessche and Jianhong Wu (Eds.), 2008)

เมื่อพิจารณาเสถียรภาพของระบบ ณ จุดสมดุลที่มีโรค จะพบว่าค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda_1 = -0.100018$, $\lambda_2 = -0.00002445$, $\lambda_3 = -0.0000177045$ จะเป็น Local Asymptotically



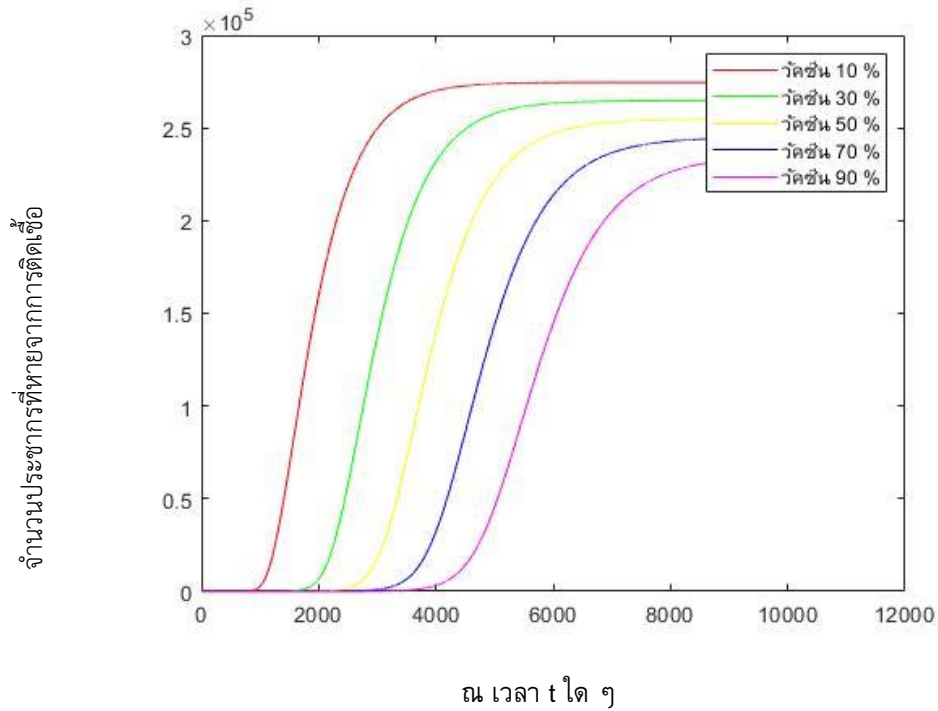
ณ เวลา t ไต ๆ

รูปที่ 6 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (S) ณ เวลา t ไต ๆ เมื่อค่า $\Phi = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ และ 0.9 ตามลำดับ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลที่มีโรค

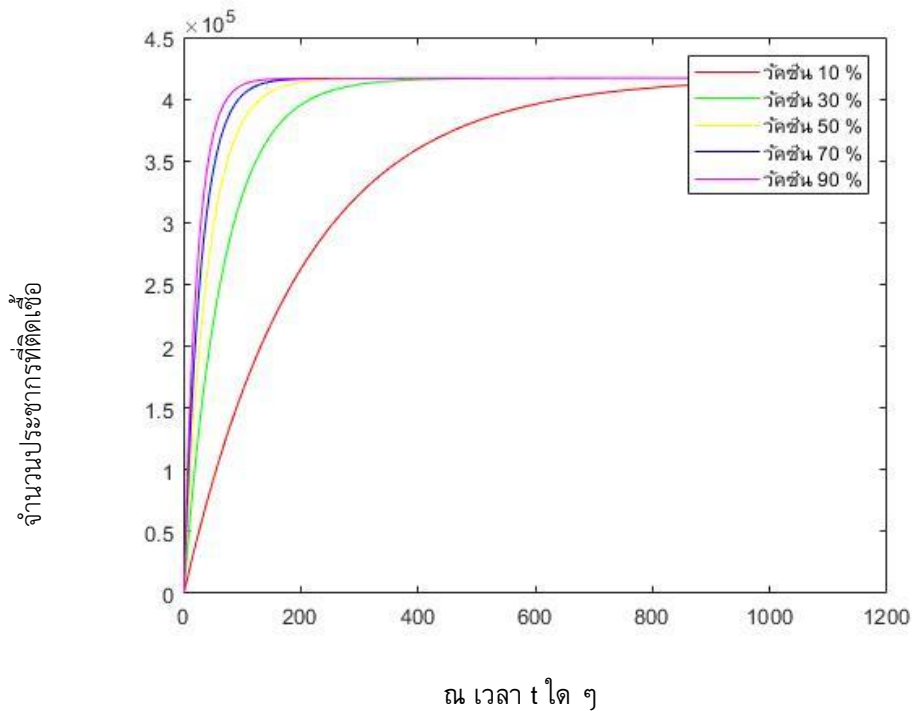


ณ เวลา t ไต ๆ

รูปที่ 7 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรที่ติดเชื้อ แต่ไม่แสดงอาการ (E) ณ เวลา t ไต ๆ เมื่อค่า $\Phi = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ และ 0.9 ตามลำดับ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลที่มีโรค



รูปที่ 8 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรที่ติดเชื้อ (I) ณ เวลา t ไต ๆ เมื่อค่า $\Phi = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ และ 0.9 ตามลำดับ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลที่มีโรค



รูปที่ 9 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรที่หายจากการติดเชื้อ (R) ณ เวลา t ไต ๆ เมื่อค่า $\Phi = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ และ 0.9 ตามลำดับ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลที่มีโรค

จากการศึกษาพบว่าอัตราการฉีดวัคซีนป้องกันการแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่เป็นปัจจัยที่ส่งผลต่อการเปลี่ยนแปลงของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่ โดยการฉีดวัคซีน ในจังหวัด

ภูเก็ต โดยพบว่าถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อไขหวัดใหญ่ ได้รับวัคซีนป้องกันโรคไขหวัดใหญ่น้อย จะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคเพิ่มขึ้น และถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อไขหวัดใหญ่ ได้รับวัคซีนป้องกันโรคไขหวัดใหญ่เพิ่มขึ้น จะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคลดลง

ผลการวิจัยและอภิปรายผลการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไขหวัดใหญ่ โดยการฉีดวัคซีน เพื่อพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไขหวัดใหญ่ ในการป้องกันโรคและลดจำนวนผู้ป่วย

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการวิจัยในครั้งนี้ คือ ระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น ซึ่งประกอบด้วยประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถแพร่เชื้อได้ ประชากรที่ติดเชื้อและสามารถแพร่เชื้อได้ ประชากรที่หายป่วยจากโรค ซึ่งผู้วิจัยได้เพิ่มค่าพารามิเตอร์อัตราการฉีดวัคซีนป้องกันการแพร่ระบาดของโรคไขหวัดใหญ่ (Φ) เป็นปัจจัยสำคัญในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ แล้วใช้วิธีการวิเคราะห์วิธีมาตรฐาน และการวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับตรวจสอบการแพร่ระบาดของโรคไขหวัดใหญ่

ผู้วิจัยได้พิจารณาจุดสมดุลที่ไม่มีโรค และจุดสมดุลมีโรค โดยการวิเคราะห์จุดสมดุลและเสถียรภาพของจุดสมดุลด้วยวิธีการวิเคราะห์วิธีมาตรฐาน ซึ่งค่าเสถียรภาพของระบบ Local Asymptotically State ที่ได้ต้องเป็นไปตามเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz เพื่อให้สามารถหาค่าระดับการติดเชื้อ (R_0) ซึ่งมีความจำเป็นภายใต้เงื่อนไข เพื่อให้ Local Asymptotically Stability of Equilibrium State ที่มีเสถียรภาพ ในส่วนของจุดสมดุลไม่มีโรค และจุดสมดุลที่มีโรคที่มีการ

แพร่ระบาดของโรค โดยที่ $R_0 = \frac{\kappa\psi N\epsilon}{(\Phi + \Omega)(\epsilon + \Omega)(\eta + \Omega)}$ สามารถพิจารณาค่าระดับการติดเชื้อ (R_0) โดยค่า

$R_0 < 1$ วิเคราะห์ได้ว่า ณ จุดสมดุลจะไม่มีโรคจึงไม่เกิดการแพร่ระบาด และค่า $R_0 > 1$ วิเคราะห์ได้ว่า ณ จุดสมดุลมีการติดเชื้อจึงเกิดการแพร่ระบาดของโรค (Jantraporn Sukawat and Surapol Naowarat, 2014) จากการวิเคราะห์พบว่าจุดทั้งสองเป็น Local Asymptotically State ซึ่งอัตราการฉีดวัคซีนป้องกันการแพร่ระบาดของโรคไขหวัดใหญ่ $\Phi = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ และ 1.0 ตามลำดับ จะพบว่าค่าระดับการติดเชื้อ $R_0 = 54.4, 27.2, 18.1, 13.6, 10.9, 9.1, 7.8, 6.8, 6.0$ และ 5.4 ตามลำดับ

จากการวิจัยพบว่าอัตราการฉีดวัคซีนป้องกันการแพร่ระบาดของโรคไขหวัดใหญ่ (Φ) เป็นปัจจัยที่ส่งผลต่อการเปลี่ยนแปลงของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไขหวัดใหญ่ โดยการฉีดวัคซีน ในจังหวัดภูเก็ต โดยพบว่าถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อไขหวัดใหญ่ ได้รับวัคซีนป้องกันโรคไขหวัดใหญ่น้อยจะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคเพิ่มขึ้น และถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อไขหวัดใหญ่ ได้รับวัคซีนป้องกันโรคไขหวัดใหญ่เพิ่มขึ้นจะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคลดลง ดังนั้นสามารถนำผลจากการวิจัยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไขหวัดใหญ่ โดยการฉีดวัคซีน ในจังหวัดภูเก็ต ใช้เป็นข้อมูลเบื้องต้นในการป้องกันโรคไขหวัดใหญ่เพื่อลดจำนวนผู้ป่วยและใช้เป็นข้อมูลทางวิชาการให้กับหน่วยงานที่เฝ้าระวังของสำนักกระบวนวิชา กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุข รวมทั้งนำเสนอข้อมูลต่อหน่วยงานด้าน สาธารณสุขดำเนินมาตรการควบคุมและป้องกันการแพร่ระบาดของโรคไขหวัดใหญ่ โดยการฉีดวัคซีนป้องกันโรคไขหวัดใหญ่แก่ประชาชนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ

ข้อเสนอแนะ

1. ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ได้จากการศึกษาในครั้งนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับโรคชนิดอื่น ที่มีลักษณะการแพร่ระบาดของโรคคล้ายกับโรคไข้หวัดใหญ่ได้
2. สามารถวิจัยและศึกษาองค์ประกอบอื่น ๆ ที่มีผลต่อการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่ โดยการเพิ่มค่าพารามิเตอร์อื่น ๆ ได้แก่ การรณรงค์ให้ความรู้ การสวมหน้ากากอนามัย เป็นต้น

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณ อาจารย์อโนวัตร จิรวัฒนาพานิช ที่ได้ให้คำปรึกษาและข้อมูลเพื่อใช้ในการวิจัย และขอบคุณ อาจารย์ในสาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต ที่ให้การสนับสนุน ให้คำปรึกษา และสถานที่ในการดำเนินการจัดทำวิจัยจนสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

เอกสารอ้างอิง

- กรมควบคุมโรค. (2561). **ไข้หวัดใหญ่ (Influenza)**. ค้นเมื่อ 19 สิงหาคม 2563, จาก www.boe.moph.go.th/fact/Influenza.htm
- กองโรคติดต่อทั่วไป. (2563). **สถานการณ์โรคไข้หวัดใหญ่**. ค้นเมื่อ 19 สิงหาคม 2563, จาก <https://ddc.moph.go.th/uploads/files/1426620200814091118.pdf>
- จักรพงษ์ บรมินهنทร์. (มปป). **ไข้หวัดใหญ่ H1N1 ระบาด ถึงตายถ้าไม่ป้องกัน**. ค้นเมื่อ 19 สิงหาคม 2563, จาก <https://med.mahidol.ac.th>
- ดร.รุจิรา คงนุ้ย และคณะ. (2557). **ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์กับวิวัฒนาการระบาดวิทยาของโรคไข้หวัดใหญ่ ไข้หวัดใหญ่ ไข้หวัดนก ไข้หวัดหมู ในประเทศไทย**. นนทบุรี : มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ
- มนัสนันท์ ลิ้มปวีทยากุล และชมพูนุช โมรา. (2558). **การเฝ้าระวังโรคไข้หวัดใหญ่ของโรงพยาบาลส่งเสริมสุขภาพตำบลในพื้นที่ชายแดนไทย-สาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว**. อุบลราชธานี : มหาวิทยาลัยราชภัฏอุบลราชธานี
- มาลี ศรีพรหม และคณะ. (2559). **ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโรคไข้หวัดใหญ่ โดยพิจารณาผลกระทบจากปริมาณน้ำฝน**. สกลนคร : มหาวิทยาลัยราชภัฏสกลนคร
- สุกัลยา ศรีสุริฉิน. (2559). **การสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์**. ค้นเมื่อ 19 สิงหาคม 2563, จาก http://elearning.nsruc.ac.th/web_elearning/math_model/
- อโนวัตร จิรวัฒนาพานิชและคณะ. (2560). **ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ SEIR สำหรับการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคอสุกฮิสโดยการรณรงค์ให้ความรู้** (รายงานการวิจัย). ภูเก็ต : มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต
- เอกพงษ์ บุญเซ็น. (2554). **แบบจำลอง SIR สำหรับการย้ายถิ่นของประชากรหนึ่งกลุ่ม** (รายงานการวิจัย). กรุงเทพมหานคร : มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
- Fred Brauer, Pauline den Driessche and Jianhong Wu. (2008). **Mathematical Epidemiology**. ค้นเมื่อ 19 สิงหาคม 2563, จาก <https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-540-78911-6>
- Jantrapon Sukawat and Surapol Naowarat. (2014). **Effect of Rainfall on the transmission Model of Conjunctivitis**. Advanced in Environmental ,Biology, 8(14) : 99-104.
- Kermack and McKendrick. (1927). **A contribution to the mathematical theory of epidemics**. ค้นเมื่อ 19 สิงหาคม 2563, จาก <https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspa.1927.0118>