ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของวัณโรค โดยการสวมหน้ากากอนามัย ในจังหวัดภูเก็ต

นัฐลิณี ทองสงค์*1 อาจารย์อนุวัตร จิรวัฒนพาณิช2
[1,2]สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาและวิเคราะห์เสถียรภาพของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับควบคุมการแพร่ระบาดของวัณโรคโดยการสวมหน้ากากอนามัย ซึ่งวิเคราะห์ตัวแบบโดยใช้วิธีการวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐาน ศึกษาจุดสมดุล ศึกษาเสถียรภาพของจุดสมดุล หาคำตอบเชิงวิเคราะห์ ศึกษาอัตราการสวมหน้ากากอนามัย (ε) ในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์และหาคำตอบเชิงตัวเลข ผลการวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์พบว่า ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรคเมื่ออัตราการสวมหน้ากากอนามัย $(\varepsilon = 0.9)$ มีค่าระดับการติดเชื้อ (R_0) เท่ากับ 0.9523807 และอัตราการสวมหน้ากากอนามัย $(\varepsilon = 0.8)$ มีค่าระดับการติดเชื้อ (R_0) เท่ากับ 1.9047615 และอัตราการสวมหน้ากากอนามัยเป็นปัจจัยที่มีผลต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีการสวมหน้ากากอนามัยป้องกัน จะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคของโรคลดลง

คำสำคัญ: ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์, วัณโรค, การควบคุมการแพร่ระบาดของโรค, การสวมหน้ากากอนามัย

Abstract

The purpose of this research is to develop and analyze the stability of mathematical model control the spread of tuberculosis put on mask Analyze the model using standard methods Study balance Study the stability of the balance point Find analytical answers Study of wear rate mask (ε) in mathematical models and find numerical answers. The results of the analysis of the mathematical models showed that at the equilibrium without disease, when the rate of wearing masks $(\varepsilon = 0.9)$ had the infection level (R_0) equal 0.9523807 and the rate of wearing masks $(\varepsilon = 0.8)$ had the infection level (R_0) equal 1.9047615 and the rate of mask wearing was a factor affecting mathematical models. If a population at risk of infection is wearing protective masks Will reduce the spread of disease.

Keyword: Mathematical model, tuberculosis, epidemic control, put on mask

บทนำ

คณิตศาสตร์ได้เข้ามามีบทบาทเกี่ยวข้องในการดำรงชีวิตของมนุษย์ สามารถนำมาประยุกต์ใช้ได้หลากหลาย โดยเฉพาะทางการแพทย์สามารถประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์เพื่อจำลองการเกิดโรคและการรักษาโรคต่าง ๆ รวมทั้งเป็นเครื่องมือช่วยทำความเข้าใจเกี่ยวกับสุขภาพหลาย ๆด้าน อาทิ สภาพแวดล้อมที่ทำให้เกิดโรคต่าง ๆ การป้องกันโรค การทดสอบปริมาณยา เป็นต้น ปัจจุบันการเปลี่ยนแปลงของสภาพภูมิอากาศ สิ่งแวดล้อมเป็นสาเหตุทำให้เกิดโรคที่ติดต่อได้ง่ายมีการแพร่ระบาดอย่างรวดเร็วส่งผลต่อสุขภาพทำให้มนุษย์เสียชีวิตได้ง่าย ดังนั้นจำเป็นต้องอาศัยเครื่องมือ

ทางคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์มาประยุกต์ใช้แก้ปัญหาช่วยให้มนุษย์มีคุณภาพชีวิตที่ดีขึ้น (อนุวัตร จิรวัฒนาพาณิช และคณะ, 2562)

จากการศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์แสดงให้เห็นถึงบทบาทและประโยชน์ของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่มีส่วนช่วยในการแก้วิกฤตการณ์ที่กำลังเกิดขึ้นจากโรคภัยต่าง ๆ โดยจะจำลองประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ตัวเชื้อโรค ตัวพาหะนำโรค และผู้ติดเชื้อ โดยแปลงข้อมูลให้อยู่ในรูปสมการทางคณิตศาสตร์ เพื่ออธิบายลักษณะของการระบาด และการดำเนินของโรคโดยที่ผู้วิจัยไม่จำเป็นต้องไปศึกษากับมนุษย์โดยตรงซึ่งอาจเกิดอันตรายต่อชีวิตของผู้วิจัยและผู้ป่วยได้อีก ทั้งยังช่วยลดงบประมาณสำหรับการเสริมมาตรการการรักษาและการป้องกันโรคตามความต้องการที่แท้จริงได้อย่างรวดเร็วและเหมาะสมมากที่สุดด้วย (ธีรวัฒน์ นาคะบุตร, 2546)

วัณโรค (Tuberculosis หรือ TB) เป็นโรคติดต่อที่เกิดจากเชื้อแบคทีเรีย Mycobacterium จัดอยู่ในกลุ่ม Mycobacterium tuberculosis complex ชื่อ Mycobacterium tuberculosis วัณโรคเกิดได้ใน ทุกอวัยวะของร่างกาย ส่วนใหญ่มักเกิดที่ปอด (ร้อยละ 80) ซึ่งสามารถแพร่เชื้อได้ง่าย วัณโรคนอกปอดอาจ พบได้ในอวัยวะอื่น ๆได้แก่ เยื่อหุ้มปอด ต่อมน้ำเหลือง กระดูกสันหลังข้อต่อช่องท้อง ระบบทางเดินปัสสาวะ ระบบสืบพันธุ์ระบบประสาท เป็นต้น วัณโรคเป็นโรคติดต่อจากคนสู่คนผ่านทางอากาศ (airborne transmission) โดยเมื่อผู้ป่วยวัณโรค ไอจาม พูดดังๆตะโกน หัวเราะ หรือร้องเพลง ทำให้เกิดละอองฝอย(droplet nuclei) ฟุ้งกระจายออกมาละอองฝอยที่มีขนาดใหญ่มากจะตกลงสู่พื้นดินและแห้งไป ละอองฝอยที่มีขนาดเล็ก 1 - 5 ไมโครเมตร จะลอยและกระจายอยู่ในอากาศ ซึ่งผู้อื่นสูดหายใจเอาละอองฝอยที่มีเชื้อวัณโรคเข้าไป อนุภาคขนาดใหญ่จะติดอยู่ที่จมูกหรือลำคอซึ่งมักไม่ก่อให้เกิดโรคแต่อนุภาคขนาดเล็ก ๆจะเข้าไปสู่ถุงลมในปอดเชื้อจะถูกทำลายด้วยระบบภูมิคุ้มกันของร่างกาย หากมีเชื้อที่ถูกทำลายไม่หมดจะแบ่งตัวทำให้เกิดการติดเชื้อ ถ้าระบบภูมิคุ้มกันแข็งแรงจะสามารถยับยั้งการแบ่งตัวของเชื้อวัณโรค ผู้ป่วยวัณโรคมักจะมีอาการ ไอเรื้อรังมากกว่า 2 สัปดาห์ เจ็บหน้าอก ไอมีเลือดหรือเสมหะปน น้ำหนักลด ไข้เหงื่อออกผิดปกติตอนกลางคืน อ่อนเพลียเหนื่อยง่าย เบื่ออาหาร เป็นต้น ดังนั้นผู้ป่วยและผู้ใกล้ชิดจึงควรสวมหน้ากากอนามัยเพื่อลดการแพร่กระจายของละอองฝอย รวมทั้งหลีกเลี่ยงการคลุกคลีใกล้ชิดกับผู้ป่วย (สำนักวัณโรค กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุข, 2556)

จากการศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของวัณโรคทำให้ทราบถึงการแพร่ระบาดและผลลัพธ์ที่ได้จากตัวแบบช่วยให้ผู้วิจัยเข้าใจถึงปัจจัยที่สามารถควบคุมการแพร่ระบาดของโรคได้ รวมทั้งมีความเข้าใจที่ถูกต้องเกี่ยวกับการติดต่อของโรค จุดเด่นของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์คือสามารถปรับเปลี่ยนลักษณะเฉพาะของโรคระบาดได้ ซึ่งในขั้นตอนการวิเคราะห์ข้อมูล ตัวแบบจะช่วยให้เข้าใจวิวัฒนาการของการระบาดและเข้าใจถึงมาตรการควบคุมโรค ดังนั้นผลลัพธ์ที่ได้ของการศึกษานี้จะเป็นประโยชน์อย่างสูงในการลดความเสี่ยงของการติดเชื้อวัณโรค และการควบคุมวัณโรค การวิจัยในครั้งนี้ผู้วิจัยได้พัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์จากงานวิจัยเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของวัณโรคในประเทศไทย (พันธนี พงษ์สัมพันธ์และนภศูล วงษ์วานิช,2562) โดยเพิ่มตัวแปรอัตราการสวมหน้ากากอนามัย

จากเหตุข้างต้นผู้วิจัยได้ตระหนักและเห็นประโยชน์ที่ได้รับจึงทำการวิจัยเรื่อง ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของวัณโรคโดยการสวมหน้ากากอนามัย ซึ่งผู้วิจัยได้เพิ่มตัวแปรอัตราการสวมหน้ากากอนามัยเป็นปัจจัยสำหรับการศึกษาในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ เพื่อสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับป้องกันและควบคุมโรควัณโรคที่มีประสิทธิภาพสูงขึ้น

วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1. เพื่อพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับควบคุมการแพร่ระบาดของวัณโรคโดยการสวมหน้ากากอนามัยในจังหวัดภูเก็ต

2. เพื่อวิเคราะห์เสถียรภาพของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับควบคุมการแพร่ระบาดของวัณโรค โดยการสวมหน้ากากอนามัย ในจังหวัดภูเก็ต

วิธีการวิจัย

การศึกษาวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับวัณโรคที่สอดคล้องกับกลุ่มประชากรและลักษณะของการเกิดโรค ซึ่งมีวิธีการดำเนินการวิจัย 3 ขั้นตอนดังนี้

1. การพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยได้ศึกษาแผนภาพแสดงความสัมพันธ์ขององค์ประกอบในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ โดยกำหนดให้จำนวนประชากรทั้งหมดมีขนาดคงที่ ซึ่งจะแบ่งประชากรออกเป็น 4 กลุ่ม คือ กลุ่มประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ กลุ่มประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดได้ กลุ่มประกรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดได้ และกลุ่มประชากรที่หายป่วยจากโรค ผู้วิจัยได้กำหนดตัวแปรดังนี้ $S(t)$ จำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ณ t เวลาใด ๆ, $E(t)$ จำนวนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดได้ ณ t เวลาใด ๆ, $I(t)$ จำนวนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดได้ ณ t เวลาใด ๆ, $R(t)$ จำนวนประชากรที่หายป่วยจากโรค ณ t เวลาใด ๆ โดย $S(t)>0$, $E(t)>0$, $I(t)>0$ และ $R(t)>0$ เนื่องจากประชากรรวมมีค่าคงที่ไม่ขึ้นกับเวลาคือ $N(t)=S(t)+E(t)+I(t)+R(t)$ ซึ่งเป็นค่าคงที่

2. ตรวจสอบตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ การตรวจสอบตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของวัณโรคโดยการสวมหน้ากากอนามัย เป็นการตรวจสอบความถูกต้องของตัวแบบโดยผู้เชี่ยวชาญที่เกี่ยวข้อง กับศาสตร์นี้โดยตรง ได้แก่ นักระบาดวิทยาและนักคณิตศาสตร์

3. การวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ การวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เป็นการวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐาน (standart method) โดยศึกษาจุดสมดุลและศึกษาเสถียรภาพของจุดสมดุลเพื่อหาเงื่อนไขของพารามิเตอร์ที่เหมาะสมของจุดสมดุล หาค่าระดับการติดเชื้อโดยใช้วิธี Next Generation Method หาคำตอบเชิงวิเคราะห์และคำตอบเชิงตัวเลข โดยวิธี Numerical Analysis ดังวิธีการต่อไปนี้

3.1 การวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐาน (standart method)

การวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐานเป็นการศึกษาจุดสมดุล ค่าระดับการติดเชื้อ และเสถียรภาพของระบบ ดังนี้

3.1.1 การหาขอบเขตของค่าคงที่ (Invarian Region) เป็นการหาขอบเขตของค่าคงที่และช่วงคำตอบที่เป็นจำนวนจริงบวก โดยการใช้เทคนิคการอินทิเกรตช่วยแสดงช่วงคำตอบของ $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ และ $R(t)$ จะมีขอบเขตของค่าคงที่ (Invarian Region) อยู่ในช่วงจำนวนจริง

3.1.2 จุดสมดุล (Equilibrium point) การหาจุดสมดุลดำเนินการโดยจัดสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ให้เท่ากับศูนย์ คือ $\frac{dS}{dt}=0$, $\frac{dE}{dt}=0$, $\frac{dI}{dt}=0$, $\frac{dR}{dt}=0$ จะได้ค่าจุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อโรค (Disease Free Equilibrium Point: E_0) ในกรณีที่ไม่มีการติดเชื้อโรค โดยกำหนดให้ $E_0(S,E,I,R)=E_0(N,0,0,0)$ และจะได้ค่าจุดสมดุลเกิดการแพร่ระบาดของเชื้อโรค **(Endemic Equilibrium Point:** E_1) ในกรณีที่มีการระบาดของเชื้อโรค โดยกำหนดให้ $I\neq 0$, จะได้ $E_1(S,E,I,R)=E_1(S^*,E^*,I^*,R^*)$

3.1.3 การหาค่าระดับการติดเชื้อ (Basic Reproductive Number: R_0**)** ค่าระดับการติดเชื้อเป็นค่าเฉลี่ยที่ผู้ป่วยหนึ่งคนสามารถทำให้คนกลุ่มเสี่ยงป่วยเป็นจำนวนกี่คนในช่วงเวลาที่เขายังป่วยอยู่ โดยใช้วิธีการ Next Generation Method โดยจัดการสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นในรูป $\frac{dX}{dt}=F(X)-V(X)$ เพื่อหาค่า R_0 จาก

เมตริกซ์ $\rho(FV^{-1})$ ซึ่ง $F(X)$ คือเมตริกซ์ของผู้ป่วยที่เพิ่มขึ้น, $V(X)$ คือ เมตริกซ์ของผู้ป่วยที่เปลี่ยนสถานะจากกลุ่มหนึ่งไปอีกกลุ่มหนึ่ง ได้จากอนุพันธ์ย่อย (Partial Derivative) ดังนี้

$$X=\begin{bmatrix} S \\ E \\ I \\ R \end{bmatrix}, \quad F=\left[\frac{\partial F_i(E_0)}{\partial X_i}\right] \text{และ } V=\left[\frac{\partial V_i(E_0)}{\partial X_i}\right]$$ โดยพิจารณา R_0 ดังนี้

1. ถ้า $R_0>1$ แสดงว่า โรคมีการระบาดเพิ่มขึ้น (Epidemic)
2. ถ้า $R_0=1$ แสดงว่า โรคเริ่มเสถียร (Endemic)
3. ถ้า $R_0<1$ แสดงว่า โรคไม่มีการระบาด

3.2 การวิเคราะห์เสถียรภาพ (Stability Analysis) เป็นการค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen Value) เพื่ออธิบายคำตอบของสมการเกี่ยวกับค่าความสมดุลสำหรับการตรวจสอบว่าเป็น Local Asymptotically Stable มี 2 กรณี ดังนี้

1) Local Asymptotically Stable ณ จุด E_0 ของจุดสมดุลที่ไม่มีโรค โดยการตรวจสอบค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมตริกซ์ ณ สภาวะที่ไม่มีโรค (E_0) ซึ่งจะได้สมการลักษณะเฉพาะจาก $\det(J_0-\lambda I)=0$ ซึ่ง J_0 คือจาโคเบียนเมตริกซ์ ณ จุด E_0 และ I คือเมตริกซ์เอกลักษณ์ โดยมีข้อกำหนดว่า λ ทุกค่าส่วนจริงจะเป็นลบซึ่งจะสอดคล้องตามเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz ซึ่งจะส่งผลให้ค่า $R_0<1$

2) Local Asymptotically Stable ณ จุด E_1 ของจุดสมดุลที่มีโรค โดยการตรวจสอบค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมตริกซ์ ณ สภาวะที่มีการแพร่ระบาดของโรค (E_1) ซึ่งจะได้สมการลักษณะเฉพาะจาก $\det(J_1-\lambda I)=0$ ซึ่ง J_1 คือจาโคเบียนเมตริกซ์ ณ จุด E_1 และ I คือเมตริกซ์เอกลักษณ์ โดยมีข้อกำหนดว่า λ ทุกค่าส่วนจริงจะเป็นลบซึ่งจะสอดคล้องตามเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz ซึ่งจะส่งผลให้ค่า $R_0>1$

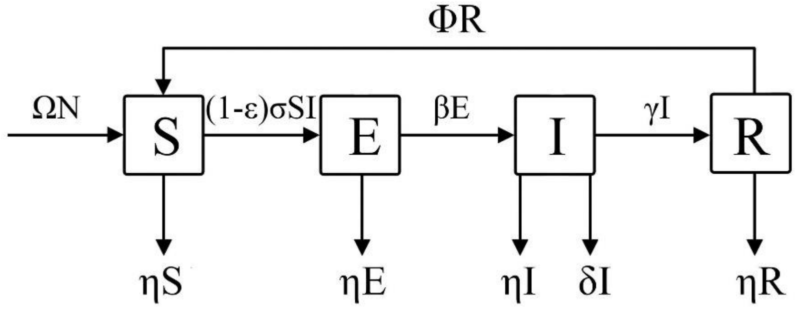
3.3 การวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Numerical Analysis)

การวิเคราะห์เชิงตัวเลขเป็นการพิจารณาหาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมที่ทำให้จุดสมดุลที่ไม่มีโรค (Disease Free Equilibrium Point: E_0) และจุดสมดุลที่เกิดการแพร่ระบาดของโรค **(Endemic Equilibrium Point:** E_1) ที่ทำให้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์เป็น Local Asymptotically Stable เพื่อนำค่าพารามิเตอร์ไปคำนวณหาคำตอบเชิงตัวเลขโดยจำลองแบบด้วยโปรแกรม Matlab (สุกัลยา ศรีสุริฉัน, 2559)

ผลการศึกษา

1. ผลการพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตสาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของวัณโรค โดยการสวมหน้ากากอนามัย

จากตัวแปรข้างต้นผู้วิจัยได้สร้างแผนภาพตัวแบบเชิงคณิตสาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของวัณโรค โดยการสวมหน้ากากอนามัย



รูปที่ 1 แผนภาพความสัมพันธ์และองค์ประกอบของการควบคุมการแพร่ระบาดของวัณโรค

โดยการสวมหน้ากากอนามัย

จากรูปที่ 1 สามารถเปลี่ยนตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น (Ordinary differential equation: ODE) (Kermack and McKendrick, 1927) ดังนั้น

$$\frac{dS}{dt}=\Omega N-(1-\varepsilon)\sigma SI-\eta S+\phi R \quad (1)$$

$$\frac{dE}{dt}=(1-\varepsilon)\sigma SI-\eta E-\beta E \quad (2)$$

$$\frac{dI}{dt}=\beta E-\eta I-\delta I-\gamma I \quad (3)$$

$$\frac{dR}{dt}=\gamma I-\eta R-\phi R \quad (4)$$

โดยมีเงื่อนไขประชากรมนุษย์มีจำนวนคงที่ $N=S+E+I+R$ เมื่อกำหนดสัญลักษณ์พารามิเตอร์ ได้แก่ Ω เป็นอัตราการเกิดใหม่ของประชากรมนุษย์, η เป็นอัตราการตายโดยธรรมชาติ, ε เป็นอัตราการสวมหน้ากากอนามัย, σ เป็นอัตราการสัมผัสเชื้อ, β เป็นอัตราการฝักตัวของเชื้อ, γ อัตราการฟื้นตัว, δ เป็นอัตราการตายด้วยโรค, ϕ เป็นอัตราการเสี่ยงกลับมาเป็นวัณโรคนี้อีกครั้ง และ N เป็นจำนวนประชากรของมนุษย์ทั้งหมด เนื่องจากค่าอนุพันธ์ของค่าคงที่จะมีค่าเป็นศูนย์ และค่าจำนวนของประชากรแต่ละกลุ่มจะมีค่าไม่เกิน N โดยดำเนินการดังนี้

1.1 การวิเคราะห์ตามแบบมาตรฐาน (Standards Method

จาก **Rate of change = Rate inflow – Rate outflow** จะได้

$$F(X)=\Omega N-(1-\varepsilon)\sigma SN-\eta S+\phi R+(1-\varepsilon)\sigma SI-\eta E-\beta E+\beta E-\eta I-\delta I-\gamma I+\gamma I-\eta R-\phi R$$

ดังนั้น $$\frac{dN}{dt}=\Omega N-\eta S-\eta E-\eta I-\delta I-\eta R$$

เมื่อ $S=N,\ I=0,\ E=0,\ R=0$

จะได้ $$\frac{dN}{dt}=\Omega N-\eta N-\eta(0)-\eta(0)-\delta(0)-\eta(0)$$

$$\frac{dN}{dt}=\Omega N-\eta N$$

$$\frac{dN}{dt}=(\Omega-\eta)N$$

นั่นคือ N จะคงที่เมื่อ $\Omega=\eta$

1.1.2 การหาจุดสมดุล (Equilibrium Point) โดยจัดสมการอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้นของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ให้เท่ากับศูนย์ $\frac{dS}{dt}=0$, $\frac{dE}{dt}=0$, $\frac{dI}{dt}=0$, $\frac{dR}{dt}=0$ ได้ดังนี้

$$0=\Omega N-(1-\varepsilon)\sigma SI-\eta S+\phi R \quad (5)$$

$$0=(1-\varepsilon)\sigma SI-\eta E-\beta E \quad (6)$$

$$0=\beta E-\eta I-\delta I-\gamma I \quad (7)$$

$$0=\gamma I-\eta R-\phi R \quad (8)$$

จะได้ $$S^*=\frac{\Omega N+\phi R}{(1-\varepsilon)\sigma I^*+\eta} \quad (9)$$

$$E^* = \frac{(1-\varepsilon)\sigma I^*(\Omega N+\phi R)(\eta+\beta)}{(1-\varepsilon)\sigma I^*+\eta} \quad (10)$$

$$I^* = \frac{\beta(1-\varepsilon)\sigma(\Omega N+\phi R)(\eta+\beta)(\eta+\delta+\gamma)-\eta}{(1-\varepsilon)\sigma} \quad (11)$$

$$R^* = \frac{\gamma I^*}{\eta+\phi} \quad (12)$$

1.1.2.1. การหาจุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อโรค (Disease Free Equilibrium Point: E_0)

จากสมการ (1), (2), (3) และ (4) จะได้ค่าจุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อโรค (Disease Free Equilibrium Point: E_0) ในกรณีที่ไม่มีการติดเชื้อ โดยกำหนดให้ $I=0$, $S=N$, $E=0$ และ $R=0$ ดังนั้น จุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อโรคจะได้ $E_0(S,E,I,R)=E_0(N,0,0,0)$ เสถียรภาพของระบบ (Stability of Systems) ที่จุด E_0 โดยดำเนินการหาลักษณะเฉพาะ $\det(J_0-\lambda I_4)=0$ เพื่อหาค่า λ เมื่อ λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen Values) และ I_4 คือเมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 4×4 ดังนี้

$$J_0 = \begin{bmatrix} -\eta & 0 & -(1-\varepsilon)\sigma N & \phi \\ 0 & -(\eta+\beta) & (1-\varepsilon)\sigma N & 0 \\ 0 & \beta & -(\eta+\delta+\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -(\eta+\phi) \end{bmatrix}$$

$$J_0-\lambda I_4 = \begin{bmatrix} -\eta-\lambda & 0 & -(1-\varepsilon)\sigma N & \phi \\ 0 & -(\eta+\beta)-\lambda & (1-\varepsilon)\sigma N & 0 \\ 0 & \beta & -(\eta+\delta+\gamma)-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -(\eta+\phi)-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(J_0-\lambda I_4) = \begin{vmatrix} -\eta-\lambda & 0 & -(1-\varepsilon)\sigma N & \phi \\ 0 & -(\eta+\beta)-\lambda & (1-\varepsilon)\sigma N & 0 \\ 0 & \beta & -(\eta+\delta+\gamma)-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -(\eta+\phi)-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$0=(-\eta-\lambda)\begin{bmatrix} \Big(\big((-\eta-\beta)-\lambda\big)\big((-\eta-\delta-\gamma)-\lambda\big)+\big((1-\varepsilon)\sigma N(0)(0)\big)+\big((0)(\beta)(\gamma)\big)\Big)- \\ \Big(\big((0)\big((-\eta-\delta-\gamma)-\lambda\big)(0)\big)+\big((\gamma)(0)\big((-\eta-\beta)-\lambda\big)\big)+\big(\big((-\eta-\phi)-\lambda\big)(\beta)(1-\varepsilon)\sigma N\big)\Big) \end{bmatrix}$$

$$0=(-\eta-\lambda)(-\eta-\phi-\lambda)\Big(\lambda^2(2\eta+\beta+\delta+\gamma)\lambda+\big(\eta^2+\delta\eta+\gamma\eta+\beta\eta+\beta\delta+\beta\gamma-\beta\sigma N+\beta\varepsilon\sigma N\big)\Big)$$

จะได้ $(-\eta-\lambda)=0$ หรือ $(-\eta-\phi-\lambda)=0$

หรือ $\Big(\lambda^2(2\eta+\beta+\delta+\gamma)\lambda+\big(\eta^2+\delta\eta+\gamma\eta+\beta\eta+\beta\delta+\beta\gamma-\beta\sigma N+\beta\varepsilon\sigma N\big)\Big)=0$

จะได้ค่าสมการลักษณะเฉพาะดังนี้ $\lambda_1=-\eta$ และ $\lambda_2=-\eta-\phi$ และ λ_3,λ_4 หาได้จากการแก้สมการลักษณะเฉพาะ $\lambda^2+A\lambda+B=0$ โดยที่ $A=2\eta+\beta+\delta+\gamma$ และ $B=\eta^2+\delta\eta+\gamma\eta+\beta\eta+\beta\delta+\beta\gamma-\beta\sigma N+\beta\varepsilon\sigma N$ จากเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz จุดสมดุลอยู่ในสภาวะระบาดไร้โรคมีความเสถียรภาพเมื่อ $A>0$ และ $B>0$ นั่นคือ

$2\eta+\beta+\delta+\gamma>0$ และ $\eta^2+\delta\eta+\gamma\eta+\beta\eta+\beta\delta+\beta\gamma-\beta\sigma N+\beta\varepsilon\sigma N>0$

จะได้ว่า

$$\lambda_3,\lambda_4=\frac{-\left(2\eta+\beta+\delta+\gamma\right)\pm\sqrt{\left(2\eta+\beta+\delta+\gamma\right)^2-4\left[\eta^2+\delta\eta+\gamma\eta+\beta\eta+\beta\delta+\beta\gamma-\beta\sigma N+\beta\varepsilon\sigma N\right]}}{2}$$

จะพบว่า λ_3 และ λ_4 ส่วนจริงมีค่าลบเมื่อ

$$2\eta+\beta+\delta+\gamma>\sqrt{\left(2\eta+\beta+\delta+\gamma\right)^2-4\left[\eta^2+\delta\eta+\gamma\eta+\beta\eta+\beta\delta+\beta\gamma-\beta\sigma N+\beta\varepsilon\sigma N\right]}$$

1.1.2.2. การหาจุดสมดุลเกิดการแพร่ระบาดของเชื้อโรค (Endemic Equilibrium Point: E_1)

จากสมการ (1), (2), (3) และ (4) จะได้ค่าจุดสมดุลเกิดการแพร่ระบาดของเชื้อโรค (Endemic Equilibrium Point: E_1) ในกรณีที่มีการแพร่ระบาดของเชื้อโรค โดยกำหนดให้ $E^*\neq 0$ และ $E^*>0$ ซึ่งได้จาก

$$E_1\left(S^*,E^*,I^*,R^*\right)=\left(\frac{\Omega N+\phi R}{(1-\varepsilon)\sigma I^*+\eta},\frac{(1-\varepsilon)\sigma I^*(\Omega N+\phi R)(\eta+\beta)}{(1-\varepsilon)\sigma I^*+\eta},\frac{\beta(1-\varepsilon)\sigma(\Omega N+\phi R)(\eta+\beta)(\eta+\delta+\gamma)-\eta}{(1-\varepsilon)\sigma},\frac{\gamma I^*}{\eta+\phi}\right)$$

ดังนั้น สมการลักษณะเฉพาะที่จุด $E_1\left(S^*,E^*,I^*,R^*\right)$ โดยให้ $\det(J_1-\lambda I_4)=0$ เพื่อหาค่า λ เมื่อ λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen Values) และ I_4 คือเมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 4×4 ดังนี้

$$J_1=\begin{bmatrix}-(1-\varepsilon)\sigma I^* & 0 & -(1-\varepsilon)\sigma S^* & \phi\\ (1-\varepsilon)\sigma I^* & -(\eta+\beta) & (1-\varepsilon)\sigma S^* & 0\\ 0 & \beta & -(\eta+\delta+\gamma) & 0\\ 0 & 0 & \gamma & -(\eta+\phi)\end{bmatrix}$$

$$J_1-\lambda I_4=\begin{bmatrix}-(1-\varepsilon)\sigma I^*-\lambda & 0 & -(1-\varepsilon)\sigma S^* & \phi\\ (1-\varepsilon)\sigma I^* & -(\eta+\beta)-\lambda & (1-\varepsilon)\sigma S^* & 0\\ 0 & \beta & -(\eta+\delta+\gamma)-\lambda & 0\\ 0 & 0 & \gamma & -(\eta+\phi)-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\det\left(J_1-\lambda I_4\right)=\begin{bmatrix}-(1-\varepsilon)\sigma I^*-\lambda & 0 & -(1-\varepsilon)\sigma S^* & \phi\\ (1-\varepsilon)\sigma I^* & -(\eta+\beta)-\lambda & (1-\varepsilon)\sigma S^* & 0\\ 0 & \beta & -(\eta+\delta+\gamma)-\lambda & 0\\ 0 & 0 & \gamma & -(\eta+\phi)-\lambda\end{bmatrix}=0$$

$$0=\left(-(\eta+\phi)-\lambda\right)\begin{pmatrix}\left(\left(\left(-(1-\varepsilon)\sigma I^*\right)-\lambda\right)(-\eta-\beta-\lambda)(-\eta-\delta-\gamma-\lambda)(\beta)+(0)\left((1-\varepsilon)\sigma S^*\right)(0)+\left(-(1-\varepsilon)\sigma S^*\right)\left((1-\varepsilon)\sigma I^*\right)(0)\right)\\ \left((0)(-\eta-\beta-\lambda)\left(-(1-\varepsilon)\sigma S^*\right)+(\beta)\left((1-\varepsilon)\sigma S^*\right)\left(-(1-\varepsilon)\sigma I^*-\lambda\right)+(-\eta-\delta-\gamma-\lambda)\left((1-\varepsilon)\sigma I^*\right)(0)\right)\end{pmatrix}-$$

$$\phi\left((1-\varepsilon)\sigma I^*\right)\begin{pmatrix}\left(\left((1-\varepsilon)\sigma I^*\right)(\beta)(\gamma)+(-\eta-\beta-\lambda)(-\eta-\delta-\gamma-\lambda)(0)+\left((1-\varepsilon)\sigma S^*\right)(0)(0)\right)\\ -\left((0)(\beta)\left((1-\varepsilon)\sigma S^*\right)+(0)(-\eta-\delta-\gamma-\lambda)\left((1-\varepsilon)\sigma I^*\right)+(\gamma)(0)(-\eta-\beta-\lambda)\right)\end{pmatrix}$$

$$0=\left(-(\eta+\phi)-\lambda\right)\left(\left(\left(-(1-\varepsilon)\sigma I^*\right)-\lambda\right)(-\eta-\beta-\lambda)(-\eta-\delta-\gamma-\lambda)(\beta)-\left((1-\varepsilon)\beta^2\lambda\sigma S^*\right)\right)-$$
$$\phi\left((1-\varepsilon)\sigma I^*(\beta)(\gamma)\right)$$

$$0=\lambda^4+\left(3\eta+(1-\varepsilon)\sigma I^*+\phi+\beta+\delta+\gamma\right)\lambda^3$$
$$+\begin{pmatrix}3\eta^2+2\eta(\beta+\delta+\gamma+\phi)+\phi(\beta+\delta+\gamma)+\beta(\delta+\gamma)+\\ (1-\varepsilon)\sigma I^*(3\eta+\beta+\delta+\gamma+\phi)-(1-\varepsilon)\beta^2\sigma S^*\end{pmatrix}\lambda^2$$

$$+\begin{pmatrix} \eta^3+\eta^2(\beta+\delta+\gamma+\phi)+\eta(\beta\delta+\beta\gamma+\beta\phi+\delta\phi+\gamma\phi)+\phi(\beta+\beta\gamma)+ \\ (1-\varepsilon)\sigma I^*\left(3\eta^2+2\eta\beta+2\eta\delta+2\eta\gamma+2\eta\phi+\beta\phi+\delta\phi+\gamma\phi+\beta\delta+\beta\gamma\right)- \\ (1-\varepsilon)\beta^2\sigma S^*(\eta+\phi) \end{pmatrix}\lambda$$

$$+(1-\varepsilon)\sigma I^*\left(\eta^3+\beta\eta^2+\delta\eta^2+\gamma\eta^2+\phi\eta^2+\eta\beta\delta+\eta\beta\gamma+\eta\delta\phi+\eta\gamma\phi+\eta\beta\phi+\beta\delta\phi-\beta\gamma\phi\right)$$

จัดอยู่ในรูป $\lambda^4+a_1\lambda^3+a_2\lambda^2+a_3\lambda+a_4=0$ เมื่อ $a_1=\left(3\eta+(1-\varepsilon)\sigma I^*+\phi+\beta+\delta+\gamma\right)$

$$a_2=(3\eta^2+2\eta(\beta+\delta+\gamma+\phi)+\phi(\beta+\delta+\gamma)+\beta(\delta+\gamma)+$$
$$(1-\varepsilon)\sigma I^*(3\eta+\beta+\delta+\gamma+\phi)-(1-\varepsilon)\beta^2\sigma S^*)$$

$$a_3=\begin{pmatrix} \eta^3+\eta^2(\beta+\delta+\gamma+\phi)+\eta(\beta\delta+\beta\gamma+\beta\phi+\delta\phi+\gamma\phi)+\phi(\beta+\beta\gamma)+ \\ (1-\varepsilon)\sigma I^*\left(3\eta^2+2\eta\beta+2\eta\delta+2\eta\gamma+2\eta\phi+\beta\phi+\delta\phi+\gamma\phi+\beta\delta+\beta\gamma\right)-(1-\varepsilon)\beta^2\sigma S^*(\eta+\phi) \end{pmatrix}$$

$$a_4=\left((1-\varepsilon)\sigma I^*\left(\eta^3+\beta\eta^2+\delta\eta^2+\gamma\eta^2+\phi\eta^2+\eta\beta\delta+\eta\beta\gamma+\eta\delta\phi+\eta\gamma\phi+\eta\beta\phi+\beta\delta\phi-\beta\gamma\phi\right)\right)$$

ดังนั้น λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen Values) โดยหาได้จากสมการลักษณะเฉพาะจากสมการ $\lambda^4+a_1\lambda^3+a_2\lambda^2+a_3\lambda+a_4=0$ จะได้ว่า $a_1>0, a_3>0, a_4>0, a_1a_2a_3>a_3^2+a_1^2a_4$ นั้นคือสมการ $\lambda^4+a_1\lambda^3+a_2\lambda^2+a_3\lambda+a_4=0$ สอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz

1.1.3 การหาค่าระดับการติดเชื้อ (Basic Reproductive Number: R_0)

การหาค่าระดับการติดเชื้อหาค่า Spectral Radius ของ FV^{-1} โดยใช้ Next Generation Method ซึ่งได้จากสมการ (1) – (4) จะได้เมตริกซ์ในรูป $\frac{dX}{dt}=F(X)-V(X)$ เพื่อหาค่า Spectral Radius FV^{-1} ซึ่ง $F(X)$ และ $V(X)$ ได้จากอนุพันธ์ย่อย (Partial Derivative) ดังนี้

$$X=\begin{bmatrix} S \\ E \\ I \\ R \end{bmatrix}, \quad F=\left[\frac{\partial F_i(E_0)}{\partial X_i}\right] \text{ และ } V=\left[\frac{\partial V_i(E_0)}{\partial X_i}\right]$$

เมื่อ $F(X)$ คือเมตริกซ์ของผู้ป่วยที่เพิ่มขึ้น และ $V(X)$ คือ เมตริกซ์ของผู้ป่วยที่เปลี่ยนสถานะจากกลุ่มหนึ่งไปอีกกลุ่มหนึ่งโดยพิจารณาค่าระดับการติดเชื้อ R_0 ดังนี้

$$F(X)=\begin{bmatrix} 0 \\ (1-\varepsilon)\sigma SI \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V(X)=\begin{bmatrix} -\Omega N+(1-\varepsilon)\sigma SI+\eta S-\phi R \\ (\eta+\beta)E \\ -\beta E+(\eta+\delta+\gamma)I \\ -\gamma I+(\eta+\phi)R \end{bmatrix}$$

ดังนั้น
$$F=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ (1-\varepsilon)\sigma I & 0 & (1-\varepsilon)\sigma S & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$F(E_0)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & (1-\varepsilon)\sigma N & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$V=\begin{bmatrix}(1-\varepsilon)\sigma I+\eta & 0 & (1-\varepsilon)\sigma S & -\phi\\ 0 & \eta+\beta & 0 & 0\\ 0 & -\beta & \eta+\delta+\gamma & 0\\ 0 & 0 & -\gamma & \eta+\phi\end{bmatrix}$$

$$FV^{-1}(E_0)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{(1-\varepsilon)\beta\sigma N}{(\eta+\beta)(\eta+\delta+\gamma)} & \dfrac{(1-\varepsilon)\sigma N}{\eta+\delta+\gamma} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

พิจารณา $\left|FV^{-1}(E_0)-\lambda I_4\right|=0$

$$\left|\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{(1-\varepsilon)\beta\sigma N}{(\eta+\beta)(\eta+\delta+\gamma)} & \dfrac{(1-\varepsilon)\sigma N}{\eta+\delta+\gamma} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right|=0$$

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{(1-\varepsilon)\beta\sigma N}{(\eta+\beta)(\eta+\delta+\gamma)}-\lambda & \dfrac{(1-\varepsilon)\sigma N}{\eta+\delta+\gamma} & 0\\ 0 & 0 & -\lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(-\lambda)\left(\frac{(1-\varepsilon)\beta\sigma N}{(\eta+\beta)(\eta+\delta+\gamma)}-\lambda\right)(-\lambda)(-\lambda)=0$$

$$(-\lambda)\left(-\lambda+\frac{(1-\varepsilon)\beta\sigma N}{(\eta+\beta)(\eta+\delta+\gamma)}\right)(-\lambda)(-\lambda)=0$$

$$-\lambda^3\left(-\lambda+\frac{(1-\varepsilon)\beta\sigma N}{(\eta+\beta)(\eta+\delta+\gamma)}\right)=0$$

จะได้ $\lambda^3=0$ หรือ $\left(-\lambda+\dfrac{(1-\varepsilon)\beta\sigma N}{(\eta+\beta)(\eta+\delta+\gamma)}\right)=0$

นั่นคือ $\lambda = 0$ หรือ $\lambda = \frac{(1-\varepsilon)\beta\sigma N}{(\eta+\beta)(\eta+\delta+\gamma)}$

ดังนั้น คำนวณหาค่า Spectral Radius ของ $FV^{-1}(E_0)$ เขียนแทนด้วย

$$\rho[FV^{-1}(E_0)] = \frac{(1-\varepsilon)\beta\sigma N}{(\eta+\beta)(\eta+\delta+\gamma)}$$

จะได้ $R_0 = \frac{(1-\varepsilon)\beta\sigma N}{(\eta+\beta)(\eta+\delta+\gamma)}$

ดังนั้น จุดสมดุลที่มีโรคมีเสถียรภาพ เมื่อ $R_0 > 1$ โดย $R_0 = \frac{(1-\varepsilon)\beta\sigma N}{(\eta+\beta)(\eta+\delta+\gamma)}$

โดยพิจารณา ดังนี้

1. ค่า R_0 ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรคมีค่า $R_0 < 1$ จะไม่เกิดการแพร่ระบาด และ
2. ค่า R_0 ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรคมีค่า $R_0 > 1$ จะเกิดการแพร่ระบาด

1.2 การวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Numerical Analysis)

การวิจัยในครั้งนี้ผู้วิจัยได้ทำการวิเคราะห์เชิงตัวเลข โดยการนำค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการสำรวจข้อมูลเกี่ยวกับการระบาดของวัณโรค ซึ่งมีค่าต่าง ๆ ดังนี้

ตารางที่ 1 ค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการสำรวจข้อมูลเกี่ยวกับการแพร่ระบาดของวัณโรค

ข้อความ	สัญลักษณ์	ค่าพารามิเตอร์	หน่วย
จำนวนประชากรมนุษย์ทั้งหมด*	N	$416,582$	**คน**
อัตราการเกิดใหม่ของประชากรมนุษย์	Ω	4.8148×10^{-5}	**ต่อวัน**
อัตราการตายโดยโรค	δ	2.7869×10^{-4}	**ต่อวัน**
อัตราการสัมผัสเชื้อ	σ	4.2025×10^{-6}	**ต่อวัน**
อัตราการฟักตัวของเชื้อ	β	8.58×10^{-8}	**ต่อวัน**
อัตราการมีภูมิคุ้มกัน	γ	2×10^{-8}	**ต่อวัน**
อัตราการเสี่ยงกลับมาเป็นวัณโรคอีกครั้ง	ϕ	1.4602×10^{-6}	ต่อวัน
อัตราการสวมหน้ากากอนามัย	ε	$0-1$	

*สำนักงานสาธารณสุขจังหวัดภูเก็ต

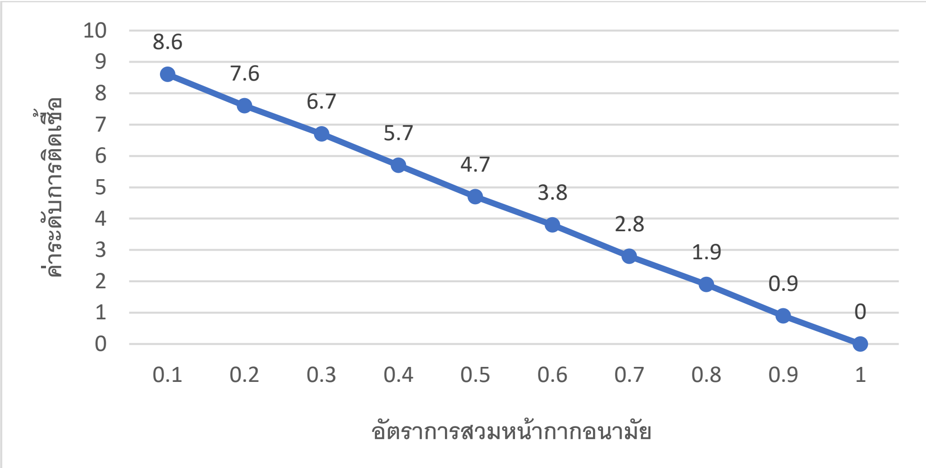
ผู้วิจัยได้ศึกษาอัตราการสวมหน้ากากอนามัยแล้วหาค่าระดับการติดเชื้อ พบความสัมพันธ์ระหว่างค่าพารามิเตอร์ของอัตราการสวมหน้ากากอนามัยกับค่าระดับการติดเชื้อได้ดังตารางที่ 2 ดังนี้

ตารางที่ 2 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าพารามิเตอร์ของอัตราการสวมหน้ากากอนามัยกับค่าระดับการติดเชื้อ

อัตราการสวมหน้ากากอนามัย(ε)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
ค่าระดับการติดเชื้อ (R_0)	8.5	7.6	6.7	5.7	4.7	3.8	2.8	1.9	0.9	0

จากตารางที่ 2 พบว่าอัตราการสวมหน้ากากอนามัยเป็นผล (ε) ปัจจัยหนึ่งที่ส่งต่อการเปลี่ยนแปลงของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของวัณโรค โดยการสวมหน้ากากอนามัย ในจังหวัดภูเก็ต ซึ่งอัตราการ

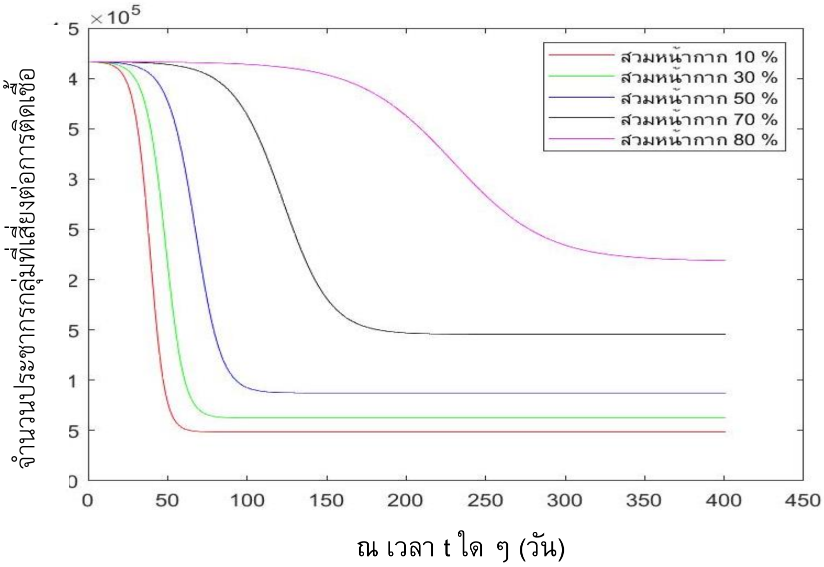
สวมหน้ากากอนามัยป้องกันวัณโรค (ε) มีค่ามากขึ้นส่งผลให้ค่าระดับการติดเชื้อ (R_0) ลดลง และแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราการสวมหน้ากากอนามัยป้องกันวัณโรค (ε) กับค่าระดับการติดเชื้อ (R_0) ดังนี้



รูปที่ 2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าพารามิเตอร์ของอัตราการสวมหน้ากากอนามัยป้องกันวัณโรค
กับค่าระดับการติดเชื้อ

เมื่อพิจารณาเสถียรภาพของระบบ ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรค จะพบว่าค่าลักษณะเฉพาะทุกค่ามีส่วนจริงเป็นค่าลบ และสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz ส่งผลให้คำตอบจะลู่เข้าสู่ $E_0 = (416581, 0, 0, 0)$ ดังนั้นจุดสมดุลไม่มีโรค E_0 จะเป็น Local Asymptotically (Fred Brauer, Pauline den Driessche and Jianhong Wu (Eds.), 2008)

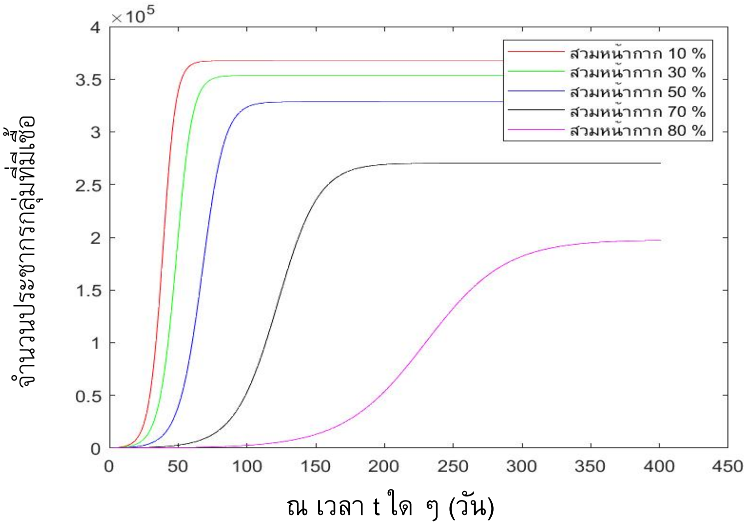
เมื่อพิจารณาเสถียรภาพของระบบ ณ จุดสมดุลที่มีโรค จะพบว่าค่าลักษณะเฉพาะทุกค่ามีส่วนจริงเป็นค่าลบ และสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz ส่งผลให้คำตอบจะลู่เข้าสู่ $E_1 = \left(S^*, E^*, I^*, R^*\right)$ ดังนั้นจุดสมดุลไม่มีโรค E_1 จะเป็น Local Asymptotically



รูปที่ 3 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มเสี่ยง (S) ณ เวลา t ใด ๆ
เมื่อค่า $\varepsilon = 0.1$, 0.3, 0.5, 0.7 และ 0.8 ตามลำดับ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลมีเชื้อ

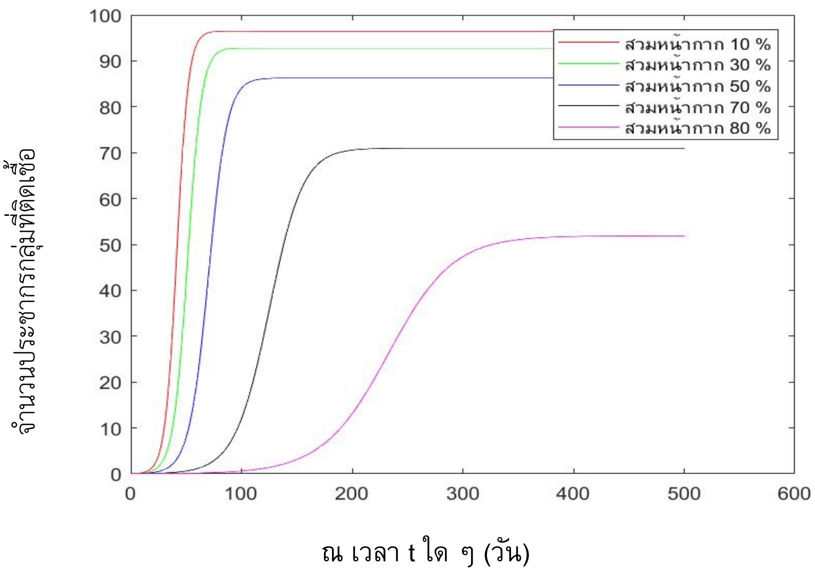
จากรูปที่ 3 เมื่อเพิ่มอัตราการสวมหน้ากากอนามัยป้องกันการแพร่ระบาดของวัณโรค (ε) ลงในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการควบคุมการแพร่ระบาดของวัณโรคให้มากขึ้นจะพบว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวน

ประชากรกลุ่มเสี่ยง (S) ณ เวลา t ใด ๆ จะค่อยๆลดลงและเปลี่ยนแปลงอย่างช้า ๆ ซึ่งถ้าประชากรมีการสวมหน้ากากอนามัยเป็นจำนวนมากขึ้นจะส่งผลให้จำนวนประชากรกลุ่มเสี่ยงลดลงอย่างช้า ๆ ซึ่งหมายถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มเสี่ยงเปลี่ยนไปเป็นกลุ่มติดเชื้อจะใช้เวลานานขึ้นจนการแพร่ระบาดของวัณโรคลดลง



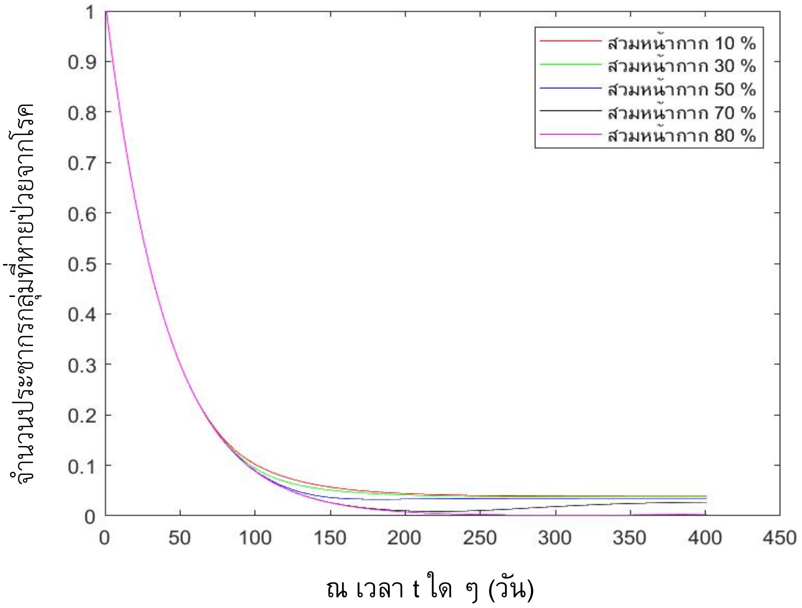
รูปที่ 4 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มที่มีเชื้อแฝง (E) ณ เวลา t ใด ๆ
เมื่อค่า $\varepsilon = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ และ 0.8 ตามลำดับ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลมีเชื้อโรค

จากรูปที่ 4 เมื่อเพิ่มอัตราการสวมหน้ากากอนามัยป้องกันการแพร่ระบาดของวัณโรค (ε) ลงในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการควบคุมการแพร่ระบาดของวัณโรคให้มากขึ้นจะพบว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มที่มีเชื้อแฝง (E) ณ เวลา t ใด ๆ ลดลงอย่างเห็นได้ชัดและยังพบว่าจุดสูงสุดของประชากรมีเชื้อแฝงเปลี่ยนแปลงอย่างชัดเจนซึ่งถ้าประชากรสวมหน้ากากอนามัยเป็นจำนวนมากขึ้นจะส่งผลให้จุดสูงสุดของกลุ่มติดเชื้อลดลง



รูปที่ 5 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มติดเชื้อ (I) ณ เวลา t ใด ๆ
เมื่อค่า $\varepsilon = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ และ 0.8 ตามลำดับ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลมีเชื้อโรค

จากรูปที่ 5 เมื่อเพิ่มอัตราการสวมหน้ากากอนามัยป้องกันการแพร่ระบาดของวัณโรค (ε) ลงในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการควบคุมการแพร่ระบาดของวัณโรคให้มากขึ้นจะพบว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มติดเชื้อ (I) ณ เวลา t ใด ๆ ลดลงอย่างเห็นได้ชัดและยังพบว่าจุดสูงสุดของประชากรกลุ่มติดเชื้อเปลี่ยนแปลงอย่างชัดเจนซึ่งถ้าประชากรสวมหน้ากากอนามัยเป็นจำนวนมากขึ้นจะส่งผลให้จุดสูงสุดของกลุ่มติดเชื้อลดลงและการแพร่ระบาดของโรคจะลดลงด้วยเช่นกัน ดังตารางที่ 2 ข้างต้น



รูปที่ 6 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรที่หายป่วยจากโรค (R) ณ เวลา t ใด ๆ
เมื่อค่า $\varepsilon = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ และ 0.8 ตามลำดับ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลมีเชื้อโรค

จากรูปที่ 6 เมื่อเพิ่มอัตราการสวมหน้ากากอนามัยป้องกันการแพร่ระบาดของวัณโรค (ε) ลงในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการควบคุมการแพร่ระบาดของวัณโรค จะส่งผลให้จำนวนประชากรกลุ่มติดเชื้อเปลี่ยนไปเป็นกลุ่มที่หายป่วยจากโรครวดเร็วขึ้น เนื่องจากจำนวนคนติดเชื้อน้อยลงจึงส่งผลให้เกิดการแพร่ระบาดลดลง

จากการศึกษาพบว่าอัตราการสวมหน้ากากอนามัยเป็นผลปัจจัยหนึ่งต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของวัณโรค โดยพบว่าถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีการสวมหน้ากากอนามัยป้องกันน้อยจะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคเพิ่มขึ้นและถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีการสวมหน้ากากอนามัยป้องกันเป็นจำนวนมากขึ้นจะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคลดลงจนกระทั่งไม่มีการแพร่ระบาดของเชื้อ

สรุปและอภิปรายผล

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการควบคุมการแพร่ระบาดของวัณโรคโดยการสวมหน้ากากอนามัย และวิเคราะห์เสถียรภาพของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการควบคุมการแพร่ระบาดของวัณโรคโดยการสวมหน้ากากอนามัย ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการวิจัยในครั้งนี้ คือ ระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น ซึ่งประกอบด้วย ประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถแพร่เชื้อได้ ประชากรที่ติดเชื้อและสามรถแพร่เชื้อได้ และประชากรที่หายป่วยจากโรค ซึ่งผู้วิจัยได้เพิ่มค่าพารามิเตอร์ (ε) คือ อัตราการรสวมหน้ากากอนามัย ลงในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์แล้วใช้วิธีการวิเคราะห์วิธีมาตรฐาน และวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับตรวจสอบการแพร่ระบาดของโรค

ผู้วิจัยได้พิจารณาจุดสมดุลที่ไม่มีโรคและจุดสมดุลที่มีโรคโดยการวิเคราะห์จุดสมดุลและเสถียรภาพของจุดสมดุลด้วยวิธีการวิเคราะห์วิธีมาตรฐาน ซึ่งค่าเสถียรภาพของระบบ Local Asymototical Stable ที่ได้ต้องเป็นไปตามเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz เพื่อให้สามารถหาค่าพารามิเตอร์ R_0 ซึ่งมีความจำเป็นภายใต้เงื่อนไขเพื่อให้ Local Asymptotically Stability of Equilibrium state ที่มีเสถียรภาพในส่วนของจุดสมดุลที่ไม่มีโรคและจุดสมดุลที่มีการแพร่ระบาดของโรค โดยที่ $R_0 = \dfrac{(1-\varepsilon)\beta\sigma N}{(\eta+\beta)(\eta+\delta+\gamma)}$ สามารถพิจารณาค่าระดับการติดเชื้อ (R_0) โดยค่า $R_0 < 1$ วิเคราะห์ได้ว่า ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรคจะไม่เกิดการแพร่ระบาดของโรคและค่า $R_0 > 1$ วิเคราะห์ได้ว่า ณ จุดสมดุลมีการติดเชื้อจะเกิดการแพร่ระบาดของโรค (Jantrapron Sukawat and Surapol Naowarat, 2014)

จากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขพบว่าจุดสมดุลทั้งสองเป็น Local Asymototical Stable ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรค เมื่ออัตราการสวมหน้ากากอนามัยการแพร่ระบาดของวัณโรค $(\varepsilon) =$ 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8 และ 0.9 ซึ่งทำให้ได้ค่าระดับการติดเชื้อ $R_0 =$ 8.572, 7.612, 6.667, 5.714, 4.762, 3.809, 2.857, 1.905 และ 0.952 ตามลำดับ ดังนั้น อัตราการสวมหน้ากากอนามัยการแพร่ระบาดของวัณโรค (ε) มีค่ามากขึ้น ส่งผลให้ค่าระดับการติดเชื้อ (R_0) ลดลงจนกระทั่งไม่ไม่มีการแพร่ระบาดของเชื้อ

จากการวิจัยพบว่า การสวมหน้ากากอนามัยเป็นผลปัจจัยหนึ่งต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของวัณโรค โดยพบว่าถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีการสวมหน้ากากอนามัยป้องกันน้อยจะส่งผลให้การแพร่ระบาดของวัณโรคเพิ่มขึ้นและถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีการสวมหน้ากากอนามัยป้องกันเป็นจำนวนมากขึ้นจะส่งผลให้การแพร่ระบาดของวัณโรคลดลงจนกระทั่งไม่มีการแพร่ระบาดของวัณโรค และจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีการสวมหน้ากากอนามัยเป็นจำนวนไม่ต่ำกว่าร้อยละ 90 ของประชากรทั้งหมด จะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคลดลงจนกระทั่งไม่มีการแพร่ระบาดของเชื้อ

ดังนั้นสามารถนำผลจากการวิจัยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของวัณโรค นำไปใช้เป็นข้อมูลเบื้องต้นในการป้องกันโรคเพื่อลดจำนวนผู้ป่วยและใช้เป็นข้อมูลทางวิชาการให้กับหน่วยงานทีเฝ้าระวังของสำนักระบาดวิทยา กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุข รวมทั้งนำเสนอข้อมูลต่อหน่วยงานด้านสาธารณสุขดำเนินการหามาตรการควบคุมและป้องกันโรควัณโรคโดยการแจกหน้ากากอนามัยให้กับผู้ป่วยวัณโรคและ ผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ

ข้อเสนอแนะ

1. ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ได้จากการศึกษาในครั้งนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้กันโรคชนิดอื่น ที่มีลักษณะการแพร่ระบาดของโรคคล้ายกับโรคไข้หวัดใหญ่ได้

2. สามารถวิจัยและศึกษาองค์ประกอบอื่น ๆ ที่มีผลต่อการควบคุมการแพร่ระบาดของวัณโรค โดยการเพิ่มค่าพารามิเตอร์อื่น ๆ ได้แก่ การรณรงค์ให้ความรู้ การฉีดวัคซีนป้องกัน เป็นต้น

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณ อาจารย์อนุวัตร จิรวัฒนพาณิช ที่ได้ให้คำปรึกษาและข้อมูลเพื่อใช้ในการวิจัย และขอบคุณอาจารย์ในสาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต ที่ให้การสนับสนุน ให้คำปรึกษาและสถานที่ในการดำเนินการจัดทำวิจัยจนสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

เอกสารอ้างอิง

ธีรวัฒน์ นาคะบุตร. (2546). **ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์**. นครปฐม : ราชภัฏนครปฐม

พันธนี พงศ์สัมพันธ์ และคณะ. (2562). **แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโรควัณโรค ในประเทศไทย**. สงขลา : มหาวิทยาลัยหาดใหญ่

สมฤดี เมฆฉาย และคณะ. (2559). **ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดวัณโรคของผู้ต้องขังในเรือนจำ** (รายงานการวิจัย). สุราษฎร์ธานี : มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี

สุกัลยา ศรีสุริฉัน. (2559). **การสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์**. ค้นเมื่อ 12 สิงหาคม 2563, จาก http://elearning.nsru.ac.th/web_elearning/math_model/

สำนักวัณโรค กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุข. (2556). **วัณโรค (Tuberculosis)**. ค้นเมื่อ 4 กันยายน 2563,จาก. https://www.saintlouis.or.th/article/show/TuberculosisTB

อนุวัตร จิรวัฒนาพาณิชและคณะ. (2562). **ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการรณรงค์ป้องกันการแพร่ระบาดของโรคตาแดง** (รายงานการวิจัย). ภูเก็ต : มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต

เอกพงษ์ บุญเซ็น. (2554). **แบบจำลอง SIR สำหรับการย้ายถิ่นของประชากรหนึ่งกลุ่ม**(รายงานการวิจัย). กรุงเทพมหานคร : มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

Fred Brauer, Pauline den Driessche and Jianhong Wu. (2008). **Mathematical Epidemiology**. ค้นเมื่อ 4 กันยายน 2563, จาก https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-540-78911-6

Jantrapron Sukawat and Surapol Naowarat. (2014). **Effect of Rainfall on the transmission Model of Conjunctivitis. Advanced in Environmental**. Biology, 8(14) : 99-104.

Kermack and McKendrick. (1927). **A contribution to the mathematical theory of epidemics**. ค้น4 กันยายน 2563, จาก https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspa.1927.0118